5.1. Векторы и матрицы

Можно рассматривать вектор как упорядоченный набор чисел

$$X = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$$

где $x_i \in \Re$ (множество вещественных чисел) - его компоненты

$i \in 1:n$ - индексы его компонент

Если иметь в виду, что индексы (номера) компонент могут идти не подряд, и вообще могут быть не обязательно элементами числового множества от 1 до какого-либо n, то удобно в обозначении вектора иметь **множество индексов его компонент**. Обозначив такое конечное множество через N, можно рассматривать вектор X, как функцию, заданную на этом конечном множестве.

$$X : N \to X[N] \ : \ \forall i \in N \ \ \exists! \ \ x[i] \in X[N]$$

Будем в дальнейшем обозначать вектор через $X[N]$, а множество индексов его компонент через N. Тогда $x[i] \quad (i \in N)$ будет его компонентой

Примеры

1. $N = \{1,2,3,4\}$, $X[N] = (2,0,-1,4)$, $x[3] = -1$, $x[2] = 0$
2. $N = \{7,1,10,5\}$, $X[N] = (3,5,9,6)$, $x[10] = 9$, $x[1] = 5$
3. $N = \{1,2,3,6,9,12\}$, $X[N] = (1,8,3,4,-5,2)$, $x[2] = 8$, $x[9] = -5$
4. $N = \{слон, мышка, гиря\}$, $Bec[N] = (20000, 0.005, 1)$, $вес[слон] = 20000$, $вес[гиря] = 1$

В данных обозначения легко выделять и пользоваться частями векторов. Пусть $N' \subset N$ (множество N' является частью (или подмножеством) множества N). Тогда $X[N]$ - вектор с множеством индексов N, а $X[N']$ - часть вектора с множеством индексов N'.

Например: 1. $N = \{1,2,3,4\}$, $X[N] = (2,0,-1,4)$, $N' = \{1,3\}$.Тогда $X[N'] = (2,-1)$

Далее (см. вышеприведенные примеры):

2. $N' = \{10\}$, $X[N'] = x[10] = 9$
3. $N' = \{6,9,2\}$, $X[N'] = (4,-5,8)$
4. $N' = \{слон, гиря\}$, $X[N'] = (20000,1)$

Скалярное произведение векторов в данных обозначениях записывается в виде

$$C[N]\cdot X[N]=\sum_{j\in N} c[j]\cdot x[j]$$

или с учетом разделения векторов на части $(N'\subset N)$

$$C[N]\cdot X[N]=C[N']\cdot X[N']+C[N\setminus N']\cdot X[N\setminus N']$$

($N\setminus N'$ - разность множеств, т.е. оставшаяся часть множества N, после удаления из него N'). Так в примере 3 $N'=\{6,9,2\}$, $X[N']=(4,-5,8)$, $N\setminus N'=\{1,3,12\}$, $X[N\setminus N']=(1,3,2)$).

Далее, матрицу $A[M,N]$ можно определить как функцию на прямом произведении конечных множеств индексов M и N

$A: M\times N\to A[M,N]:\ \forall (i,j)\in M\times N\ \exists!\ A[i,j]$ - элемент матрицы A, располагающийся в строке *i* и столбце *j*.

Примеры 3 4

1 $M=\{1,2,3\}$, $N=\{1,2,3,4\}$, $M'=\{1,2\}$, $N'=\{3,4\}$

$$A[M,N]=\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{8}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{4} & \mathbf{-7} & \mathbf{0.5}\\ 0 & \mathbf{3} & 12 & \mathbf{5}\end{bmatrix},\quad A[M,N']=\begin{bmatrix} 2 & 8\\ 4 & 0.5\\ 3 & 5\end{bmatrix},$$

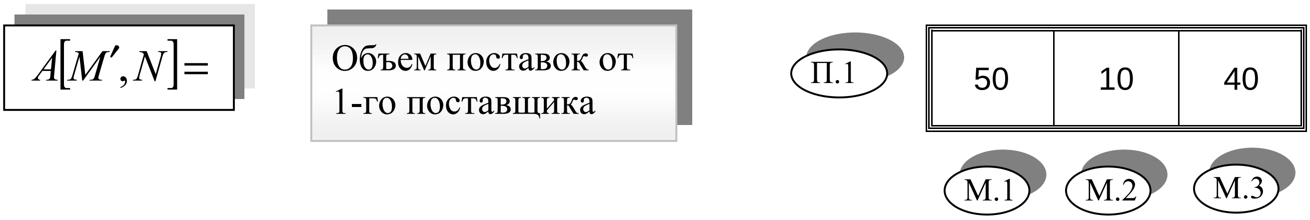
$$A[M',N]=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 8\\ -1 & 4 & -7 & 0.5\end{bmatrix},$$

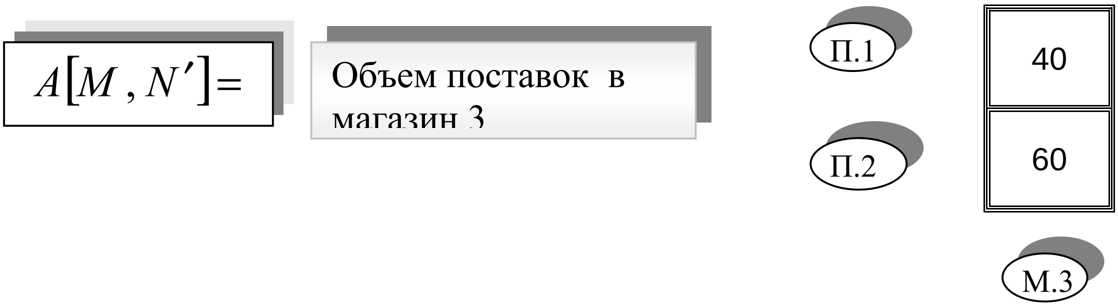
$$A[M',N']=\begin{bmatrix} 2 & 8\\ 4 & 0.5\end{bmatrix}$$

2 $M=\{\text{поставщик1},\text{поставщик2}\}$,
$N=\{\text{магазин1},\ \text{магазин2},\ \text{магазин3}\}$,
$M'=\{\text{поставщик1}\}$, $N'=\{\text{магазин3}\}$

$A[M,N]=\text{ОБЪЕМ ПОСТАВОК}=$

П.1	**50**	**10**	**40**
П.2	70	90	**60**
	М.1	М.2	М.3





При умножении векторов и матриц справедливы легко проверяемые свойства ($M' \subset M, N' \subset N$)

$$A[M,\mathbf{N}]\cdot X[\mathbf{N}] = \sum_{j\in N} A[M,j]\cdot x[j] = b[M]$$

$$V[\mathbf{M}]\cdot A[\mathbf{M},N] = \sum_{i\in M} v[i]\cdot A[i,N] = c[N]$$

$$A[M,\mathbf{N}]\cdot B[\mathbf{N},L] = C[M,L]$$

$$D[K,\mathbf{M}]\cdot A[\mathbf{M},N] = F[K,N]$$

$$A[M,\mathbf{N}]\cdot X[\mathbf{N}] = A[M,\mathbf{N}']\cdot X[\mathbf{N}'] + A[M,\mathbf{N}\setminus\mathbf{N}']\cdot X[\mathbf{N}\setminus\mathbf{N}']$$

$$V[\mathbf{M}]\cdot A[\mathbf{M},N] = V[\mathbf{M}']\cdot A[\mathbf{M}',N] + V[\mathbf{M}\setminus\mathbf{M}']\cdot A[\mathbf{M}\setminus\mathbf{M}',N]$$

Справедливо также равенство

$$V[M]\cdot(A[M,N]\cdot X[N]) = (V[M]\cdot A[M,N])\cdot X[N]$$

Если $|N'| = |M|$ (число элементов в множестве N' равно числу элементов в множестве M), тогда матрица $A[M,N']$ - квадратная.
$E[M,N']$ - единичная квадратичная матрица, для которой справедливы соотношения

$$E[M,N']\cdot X[N'] = X[M]$$
$$U[M]\cdot E[M,N'] = U[N']$$

В дальнейшем (если не оговорено заранее) будем считать, что
$M = \{1 \quad 2 \quad \cdots \quad m\}$, $N = \{1 \quad 2 \quad \cdots \quad n\}$
Векторы (набор векторов, систему векторов) будем называть **линейно-независимыми**, если равенство

(*) $\sum_{j=1}^{S} A_j[M]\cdot\lambda_j = \boldsymbol{0}[M]$ ($\boldsymbol{0}[M]$ - нулевой вектор, вектор состоящий из нулей)

возможно **только при всех** $\lambda_j = 0$ **(** $j \in 1:S$ **)**.
С учетом обозначений $S = \{1,2,\cdots,s\}$,
$A[M,S] = \{A_1[M], A_2[M],\cdots, A_s[M]\}$,
$\lambda[S] = \{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s\}$ равенство (*) записывается в виде

(+) $A[M,S]\cdot\lambda[S] = \boldsymbol{0}[M]$

т.е. однородная система с матрицей $A[M\ ,S]$ имеет только тривиальное (нулевое) решение.
Если же система (*) (или (+)) имеет нетривиальное (ненулевое) решение, то вектора, составляющие матрицу $A[M\ ,S]$ будут **линейно-зависимыми.**

Если количество линейно независимых векторов-столбцов, образующих матрицу $A[M\ ,S]$ совпадает с числом ее строк (т.е. $|M| = |S|$), говорят, что вектора $\{A_1[M],\cdots,A_s[M]\}$ (столбцы матрицы $A[M\ ,S]$) образуют ***базис*** в пространстве векторов размерности $m = |M|$, а сама **матрица (квадратная)** называется **невырожденной (неособой, базисной)** матрицей.

Любая невырожденная матрица $A[M,N']$, ($|N'| = |M|$) имеет **обратную матрицу** , $B[N',M]$ определяемую соотношениями

$$A[M,N']\cdot B[N',M] = E[M,M]$$
$$B[N',M]\cdot A[M,N'] = E[N',N']$$

В дальнейшем будут использоваться следующие *стандартные обозначения и термины*:

Система уравнений с матрицей коэффициентов A, вектором правой части ***b*** относительно вектора неизвестных X

(**) $$A[M,N]\cdot X[N]=b[M]$$

(будем считать, что все строки матрицы $A[M,N]$, линейно независимы).

Базисное множество индексов N' - $N'\subset N$: столбцы матрицы $A[M,N']$ образуют базис

Базисная матрица - $A[M,N']$

Небазисная часть матрицы $A[M,N]$ - матрица $A[M,N\setminus N']$

Матрица обратная к базисной

(или **обратная базисная матрица**) - $B[N',M]$:

$$B[N',M]\cdot A[M,N']=E[N',N']$$

Матрица коэффициентов разложения столбцов исходной матрицы по текущему базису - матрица

$$Z[N',N]=B[N',M]\cdot A[M,N]=(B[N',M]\cdot A[M,N'],B[N',M]\cdot A[M,N\setminus N'])=$$

$$=\left(E[N',N'],Z[N',N\setminus N']\right)$$

Базисное решение системы (**) - вектор

$$X[N]:\begin{cases}X[N']:A[M,N']\cdot X[N']=b[M],(m.e.X[N']=B[N',M]\cdot b[M])\\ X[N\setminus N']=0[N\setminus N']\end{cases}$$

($X[N'],X[N\setminus N']$ - соответственно базисная и небазисная части базисного решения).

• **Базисное множество индексов** N' далее для кратности (когда это не будет вызывать недоразумений) будем называть базисным множеством, базисом индексов или даже просто базисом, имея в виду, что базис образуют столбцы матрицы с множеством индексов $\boldsymbol{N'}$ •