5.10. Пары двойственных задач. Теоремы двойственности

Рассмотрим ЗЛП в общей форме записи ($M_1, M_2 \subset M$, $M_1 \cup M_2 = M$, $N_1, N_2 \subset N$, $N_1 \cup N_2 = N$)

$$f(X) = C[N] \cdot X[N] \to \max$$
$$A[M_1, N] \cdot X[N] \le b[M_1]$$
$$A[M_2, N] \cdot X[N] = b[M_2]$$
$$X[N_1] \ge \boldsymbol{0}[N_1]$$
$$X[N_2] \lessgtr \boldsymbol{0}[N_2]$$

С ней тесно связана некоторая другая ЗЛП, которая носит название ЗЛП двойственной к данной. $g(Y) = Y[M] \cdot b[M] \to \min$

$$Y[M] \cdot A[M, N_1] \ge C[N_1]$$
$$Y[M] \cdot A[M, N_2] = C[N_2]$$
$$Y[M_1] \ge \boldsymbol{0}[M_1]$$
$$Y[M_2] \lessgtr \boldsymbol{0}[M_2]$$

Построение двойственной задачи сводится к следующей схеме:

①-② Число переменных в двойственной задаче равно числу ограничений в исходной, а число ограничений в двойственной равно числу переменных в исходной.

③ В двойственной задаче меняется вид экстремума (max на min и наоборот).

④ Векторы правой части ($b[M]$) и коэффициентов целевой функции ($\mathrm{C}[N]$) в двойственной задаче меняются местами: первый становится вектором коэффициентов целевой функции, а второй - вектором правой части в системе ограничений.

⑤Левая часть системы ограничений строится по транспонированной матрице $A^T[N, M]$ (строки в $A[M, N]$ становятся столбцами и наоборот), которая умножается на вектор переменных двойственной задачи $Y[M]$

⑥Знаки в системе ограничений двойственной задачи определяются знаками ограничений неотрицательности в исходной задаче:

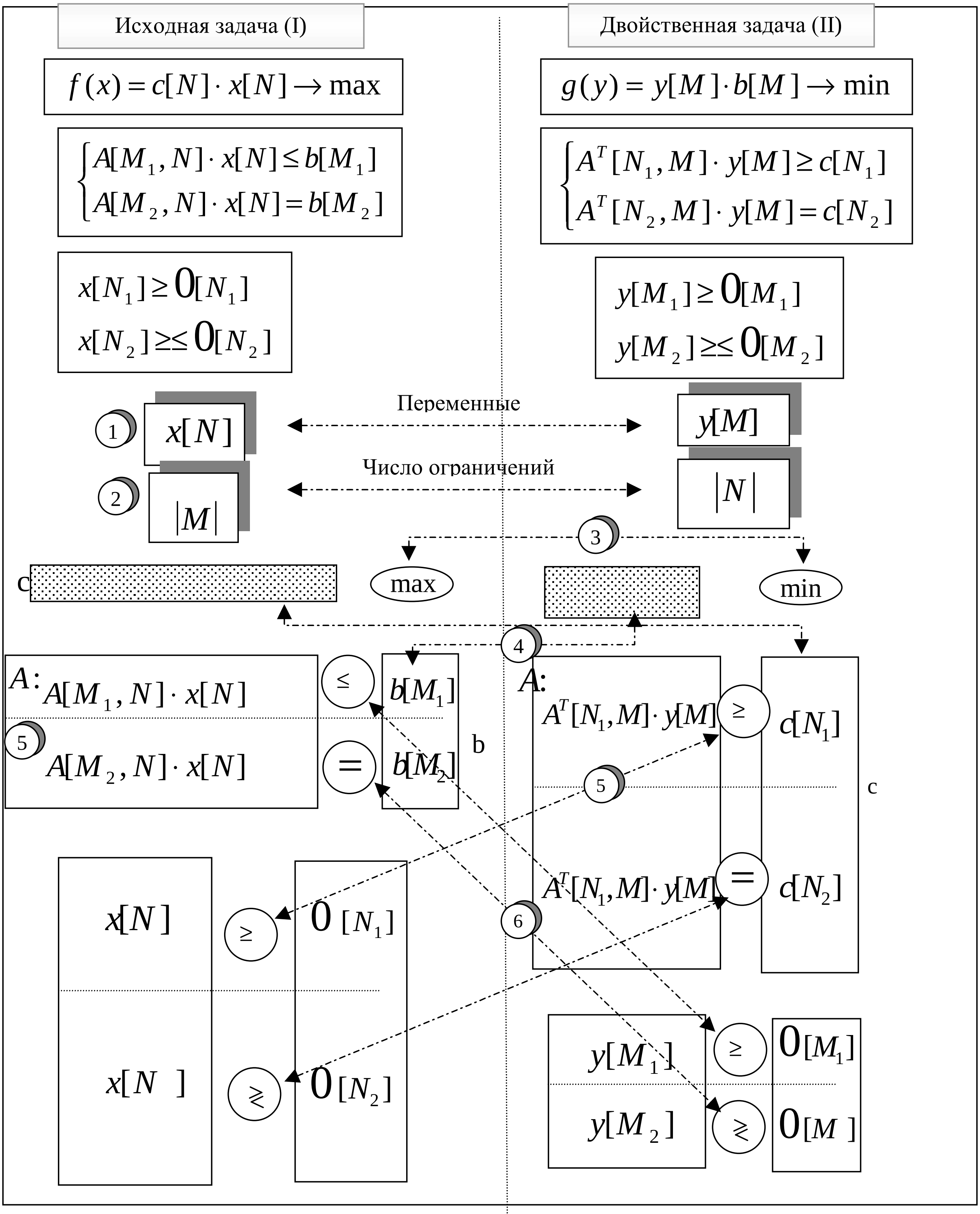
- ограничения неотрицательности на переменные $X[N_1]$ дают нежесткие ограничения с номерами из N_1 (типа ≥ для задачи на min и ≤для задачи на max);
- отсутствие ограничений неотрицательности на переменные $X[N_2]$ определяет жесткие ограничения (равенства) с номерами из N_2.

И, наоборот,

- нежесткие ограничения с номерами из M_1 дают ограничения неотрицательности на переменные $Y[M_1]$;

- жесткие ограничения с номерами из M_2 не накладывают условий неотрицательности на переменные $Y[M_2]$ (в дальнейшем запись $Y \gtrless \boldsymbol{0}$ будем опускать).

• Двусторонние стрелки на схеме показывают, что ее можно применять в обе стороны •



Выпишем **пары двойственных задач для** некоторых **частных случаев форм записи ЗЛП**:

ИСХОДНАЯ ЗАДАЧА	ДВОЙСТВЕННАЯ ЗАДАЧА

а) стандартная форма

$$f(X) = C[N] \cdot X[N] \to \max \qquad g(Y) = Y[M] \cdot b[M] \to \min$$

$$A[M,N] \cdot X[N] = b[M] \qquad Y[M] \cdot A[M,N] \ge C[N]$$

$$X[N] \ge \boldsymbol{0}[N] \qquad \text{(или} \quad A^T[N,M] \cdot Y[M] \ge C[N]\text{)}$$

б) симметричная форма

$$f(X) = C[N] \cdot X[N] \to \max \qquad g(Y) = Y[M] \cdot b[M] \to \min$$

$$A[M,N] \cdot X[N] \le b[M] \qquad Y[M] \cdot A[M,N] \ge C[N]$$

$$X[N] \ge \boldsymbol{0}[N] \qquad Y[M] \ge \boldsymbol{0}[M]\text{)}$$

в) стандартная форма без ограничений неотрицательности

$$f(X) = C[N] \cdot X[N] \to \max \qquad g(Y) = Y[M] \cdot b[M] \to \min$$

$$A[M,N] \cdot X[N] = b[M] \qquad Y[M] \cdot A[M,N] = C[N]$$

Примеры:

①
$$f = 7x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 \le 9 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 7 \end{cases}$$

$$x_2 \ge 0, \quad x_4 \ge 0$$

ЗЛП записана в общей форме. Двойственная задача будет содержать 4 ограничения (по числу переменных в исходной задаче) и вектор двойственных переменных Y будет содержать две компоненты y_1, y_2 (по числу ограничений в исходной задаче).
Запишем целевую функцию двойственной задачи

$$g = 9y_1 + 7y_2 \to \min$$

$$A[M,N]=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$ Транспонируем исходную матрицу $$A^T[N,M]=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Запишем левую и правую части системы ограничений и расставим знаки ограничений

Это вектор правой части двойственной задачи

Ограничений неотрицательности на x_1 и x_3 нет. Значит 1-е и 3-е ограничения - жесткие.

$$\begin{cases} 2y_1+y_2=7 \\ y_1+y_2\geq 3 \\ 4y_1-y_2=-1 \\ -y_1+y_2\geq 2 \end{cases}$$

Ограничения неотрицательности на x_2 и x_4 дают нежесткие 2-е и 4-е ограничения (вида $\geq$, т.к. задача на min).

Первое ограничение в исходной задаче имеет вид неравенства (нежесткое), поэтому

$$y_1 \geq 0$$

Жесткое ограничение (2-ое) не дает ограничения неотрицательности на y_2.
Окончательно запишем двойственную задачу

$$g=9y_1+7y_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 2y_1+y_2=7 \\ y_1+y_2\geq 3 \\ 4y_1-y_2=-1 \\ -y_1+y_2\geq 2 \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0$$

② $$f=5x_1+4x_2+2x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3 \leq 6 \\ 2x_1+x_2+4x_3 \leq 7 \\ 2x_1+3x_2+5x_3 \leq 12 \end{cases} \qquad A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$x_i \geq 0, \quad i \in 1:3$$

ЗЛП в симметричной форме имеет три переменные и три ограничения. Двойственная задача будет такой же размерности.

$$g = 6y_1 + 8y_2 + 12y_3 \to \min$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 2y_3 \ge 5 \\ 2y_1 + y_2 + 4y_3 \ge 4 \\ 2y_1 + y_2 + 3y_3 \ge 2 \end{cases} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$y_i \ge 0, \quad i \in 1:3$$

③

$$f = x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 12x_2 - x_3 + 10x_4 + 7x_5 = 49 \\ x_1 + x_2 + 6x_3 + 2x_4 + x_5 = 14 \end{cases}$$

$$x_i \ge 0, \quad i \in 1:5$$

ЗЛП в стандартной форме. В двойственной задаче на $\min$ (2 переменные без ограничений неотрицательности) все ограничения (их пять) имеют вид неравенств $\ge$

$$g = 49y_1 + 14y_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 \ge 1 \\ 12y_1 + y_2 \ge -1 \\ -y_1 + 6y_2 \ge 1 \\ 10y_1 + 2y_2 \ge 2 \\ 7y_1 + y_2 \ge -1 \end{cases}$$

④

$$f = 2x_1 + 7x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 \ge 10 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 4x_5 \le 24 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 \le 48 \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12$$

$$x_1 \le 0 \qquad x_3 \ge 0,$$

Прежде чем строить двойственную задачу необходимо в нежестких ограничениях сделать знаки неравенства одного типа. Умножим для этого 1-ое ограничение на (-1)и заменим $\min$ на $\max$, поменяв знаки в целевой функции

$$f^{'} = -2x_1 - 7x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 - x_5 \le -10 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 4x_5 \le 24 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 \le 48 \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12$$

$$x_1 \le 0 \qquad x_3 \ge 0,$$

Ограничение $x_1 \le 0$ можно преобразовать либо в ограничение неотрицательности путем замены $x_1^{'} = -x_1 \ge 0$, либо включив данное неравенство в систему ограничений. Выберем, например, первый способ. Тогда получим

$$f^{'} = 2x_1^{'} - 7x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1^{'} - 2x_2 - x_3 - 2x_4 - x_5 \le -10 \\ -3x_1^{'} - x_2 + 2x_3 - x_4 + 4x_5 \le 24 \\ -x_1^{'} + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 \le 48 \\ -x_1^{'} + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12 \end{cases}$$

$$x_1^{'} \ge 0 \qquad x_3 \ge 0,$$

К полученной ЗЛП запишем двойственную.

$$g = 10y_1 + 24y_2 + 48y_3 + 12y_4 \to \min$$

$$\begin{cases} y_1 - 3y_2 - y_3 - y_4 \ge 2 \\ -2y_1 - y_2 + 2y_3 + y_4 = -7 \\ -3y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4 \ge 3 \\ -2y_1 - y_2 + 4y_3 + y_4 = -1 \end{cases}$$

$$-y_1 + 4y_2 + 5y_3 + y_4 = 2$$

$$y_i \ge 0, \quad i \in 1:3$$

⑤ $$f = x_1 + 3x_2 + 5x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 4x_3 \le -2 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 \ge 12 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$$
$$x_2 \ge 0$$

Сменим знак на обратный в 1-ом неравенстве (умножив его на (-1)) и, применив схему в обратную сторону, построим двойственную задачу.

$$f = x_1 + 3x_2 + 5x_3 \to \min \qquad g = 2y_1 + 12y_2 + 10y_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 \ge 2 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 \ge 12 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 10 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 2y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\ -y_1 + 4y_2 + y_3 \le 3 \\ 4y_1 + 5y_2 + y_3 = 5 \end{matrix}$$
$$x_2 \ge 0 \qquad y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0$$

С помощью двойственной ЗЛП можно решить вопрос о разрешимости или неразрешимости исходной задачи, оценить значение ее целевой функции и, наконец, найти решение исходной задачи, зная решение двойственной, которую, зачастую, легче решить, чем исходную.

• Так, в примере ① двойственная задача содержит всего две переменные и ее можно решить, например, графическим способом, тогда как исходная имеет четыре переменные. Более того, если внимательно посмотреть на систему ограничений двойственной задачи в примере ①, то можно убедиться, что она имеет всего одно допустимое решение, которое и будет оптимальным. Это следует из того, что система

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 = 7 \\ 4y_1 - y_2 = -1 \end{cases}$$

имеет единственное решение ($y_1 = 1$, $y_2 = 5$) которое удовлетворяет остальным ограничениям. Итак, оптимальным решением двойственной задачи будет вектор $Y = (1\ ,\ 5)$. При этом $g_{\min} = 44$. Применение теорем двойственности и соотношений дополняющей нежесткости (о них см. ниже) позволяет сразу выписать решение исходной задачи:

$$x_2 = 0,\ x_4 = 0, \begin{cases} 2x_1 + 4x_3 = 9 \\ x_1 - x_3 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_3 = \dfrac{5}{6} \\ x_1 = \dfrac{37}{6} \end{matrix} \qquad f_{\max} = 7 \cdot \frac{37}{6} + \frac{5}{6} = 44 \quad \bullet$$

Рассмотрим теперь более подробно свойства пары двойственных задач. Ниже исходную и двойственную задачи будем называть задачами (I) и (II) соответственно.

Лемма 1.

Если $X[N]$ *и* $Y[M]$ *- произвольные допустимые решения задач* (I) *и* (II) *соответственно, то* $f(X) \le g(Y)$

Доказательство.

$$f(X) = C[N]\cdot X[N] = C[N_1]\cdot X[N_1] + C[N_2]\cdot X[N_2] \qquad \textbf{(*)}$$

Из системы ограничений задачи (II)

$$C[N_1] \le Y[M]\cdot A[M, N_1]$$
$$C[N_2] \le Y[M]\cdot A[M, N_2]$$

Подставляя последние выражения в (*) имеем

$$f(X) \le Y[M]\cdot A[M, N_1]\cdot X[N_1] + Y[M]\cdot A[M, N_2]\cdot X[N_2] =$$
$$= Y[M]\cdot A[M, N]\cdot X[N] \le Y[M]\cdot b[M] = g(Y)$$

■

Лемма 2

Пусть $X^*[N]$ *- допустимое решение ЗЛП* (I): $\varepsilon[N] \ge \mathbf{0}[N]$

$$\Updownarrow$$

$\exists Y^*[M]$ *- допустимое решение ЗЛП* (II): $g(Y^*) = f(X^*)$

Доказательство.

Запишем (I) в стандартной форме

$\Rightarrow$ $f(X^*) = C[N']\cdot X[N'] =$ (т.к. $\varepsilon[N'] = \mathbf{0}[N']$)

$= \tilde{Y}[M]\cdot A[M, N']\cdot X[N'] = \tilde{Y}[M]\cdot b[M]$

Возьмем в качестве $Y^*[M] \hat{=} \tilde{Y}[M]$. Тогда $g(Y^*) = f(X^*)$

При этом согласно лемме 1, $Y^*[M]$ - оптимальное решение ЗЛП (II), т.к. для любого допустимого решения $Y[M]$ ЗЛП (II)

$$g(Y) \ge f(X^*) = g(Y^*)$$

$\Leftarrow$ $X^*[N]$ - оптимальное решение ЗЛП (I) в силу того, что по лемме 1

$f(X^*) = g(Y^*) \ge f(X)$ для любого $X[N]$ - допустимого решения ЗЛП (II) ■

Теорема 1.

ЗЛП (I) разрешима $\Longleftrightarrow$ *ЗЛП (II) разрешима*

При этом $g(Y^*) = f(X^*)$ *для* $X^*[N]$ *и* $Y^*[M]$ *- оптимальных решений ЗЛП (I) и (II) соответственно.*

Доказательство.
Доказательство второй части теоремы проведено в лемме 2. Докажем необходимость и достаточность в первой части условия теоремы

$\Rightarrow$ Для разрешимости ЗЛП необходимо и достаточно: 1) $\exists$-ия хотя бы одного допустимого решения: б) ограниченности целевой функции на множестве решений.

Если ЗЛП (I) разрешима $\Rightarrow \exists X^*[N]$- ее оптимальное решение. Тогда (**а**) по лемме 2 $\exists Y^*[M]$- допустимое решение ЗЛП (II), а по лемме 1 (**б**) $g(Y^*) = f(X) \ \forall X[N]$- допустимого решения ЗЛП (I) $\Rightarrow$ ЗЛП (II) разрешима.

$\Leftarrow$ Доказывается аналогично, считая исходной задачей ЗЛП (II). ■

• Первая теорема двойственности устанавливает тот факт, что обе задачи (I) и (II) разрешимы или неразрешимы одновременно и значения целевых функций обеих задач на оптимальных решениях совпадают. Таким образом, чтобы установить разрешимость задачи и найти оптимальное значение целевой функции достаточно решить ту ЗЛП из пары двойственных задач, которая решается легче. Так, в **примере** ① на основании решения двойственной задачи (см. предыдущее замечание) из 1-ой теоремы двойственности следует, что исходная задача (I) разрешима и максимальное значение ее целевой функции

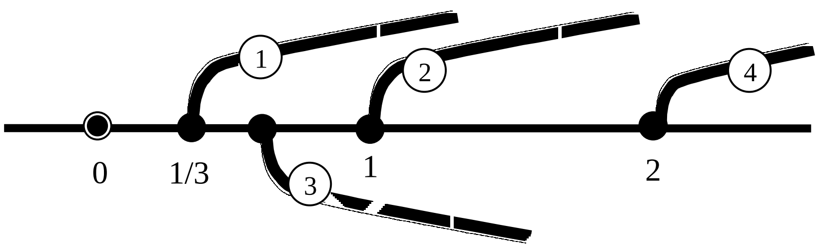
$$f_{\max} = g_{\min} = 44 \quad \bullet$$

Рассмотрим **еще один пример**

(I)
$$f = x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \to \max$$
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 12$$
$$x_i \geq 0, \ i \in 1:4$$

(II)
$$g = 12y_1 \to \min$$
$$\begin{cases} 2y_1 \geq 1 \\ 3y_1 \geq 1 \\ 4y_1 \geq 3 \\ y_1 \geq 2 \end{cases}$$

Множеством допустимых решений задачи (II) является $D = \{y_1 : y_1 \geq 2\}$



Функция $g = 12y_1$ достигает на нем минимального значения в точке $y_1 = 2$, которое равно 24. Таким образом задача (II) разрешима и $g_{\min} = 24$. Тогда по 1-й теореме двойственности разрешима и исходная задача и максимальное значение ее целевой функции тоже равно 24, т.е. $f_{\max} = 24$ •

Неразрешимость ЗЛП, вообще говоря, возможна по двум причинам:

а) пустота множества допустимых решений
(ЗЛП не имеет ни одного допустимого решения)

б) неограниченность целевой функции ЗЛП на множестве допустимых решений. Для более подробного рассмотрения вопроса о соотношении этих причин в паре двойственных задач докажем ряд нижеследующих утверждений.

Пусть D - множество допустимых решений задачи (I)

E - множество допустимых решений задачи (II)

Теорема 2.

Задачи (I) и (II) одновременно разрешимы $\Longleftrightarrow$ D *и* E *одновременно не пусты.*

Доказательство.

$\Rightarrow$ $D \neq \varnothing$ т.к. для разрешимости ЗЛП (I) необходимо хотя бы одно допустимое решение *X*[*N*]. Аналогично $E \neq \varnothing$

$\Leftarrow$ Пусть $D \neq \varnothing$ и $E \neq \varnothing$. Рассмотрим $Y_0 \in E$ - допустимое решение ЗЛП (II).

Тогда по лемме 1 $g(Y_0) \geq f(X)$, $\forall X \in D$ (т.е. g- ограничена снизу). Но тогда ЗЛП (II) разрешима $\Rightarrow$ по 1-й теореме двойственности разрешима и ЗЛП (I). ■

Терема 3.

1) Пусть $D \neq \varnothing$

Тогда $\sup\limits_{x \in D} f(X) = +\infty$ *(*f *не ограничена на* D *и ЗЛП (I)неразрешима)*$\Longleftrightarrow$ $E = \varnothing$

2) Пусть $E \neq \varnothing$

Тогда $\inf\limits_{y \in E} g(Y) = -\infty$ *(*g *не ограничена на* E *и ЗЛП (II)неразрешима)*$\Longleftrightarrow$ $D = \varnothing$

Доказательство.

Докажем, например *1)*

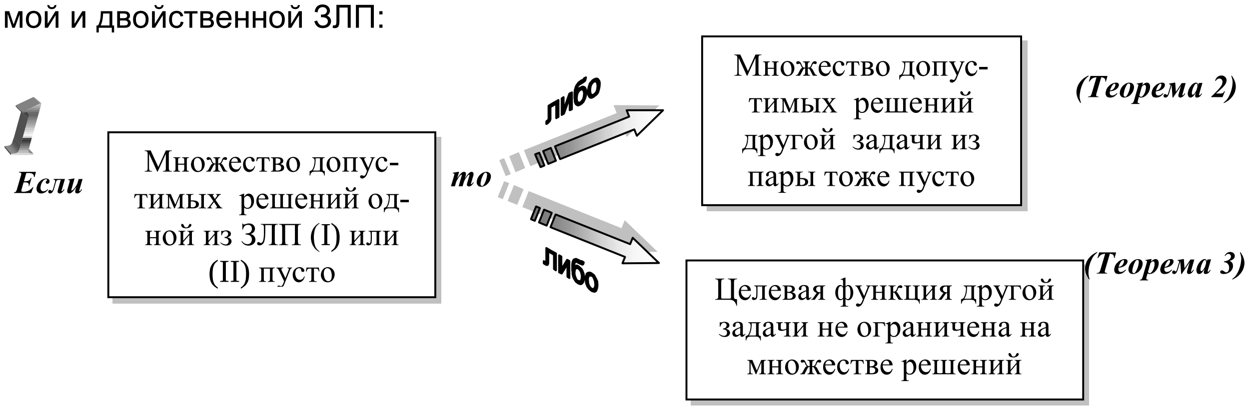
$\Rightarrow$ Пусть $E \neq \varnothing$. Тогда по теореме 2 ЗЛП (I) - разрешима !!!

$\Leftarrow$ Пусть $f(X) \leq C \;\; \forall X \in D \Rightarrow$ ЗЛП (I) разрешима.

Тогда по 1-й теореме двойственности разрешима и ЗЛП (II). т.е. $E \neq \varnothing$!!!

Вторая часть теоремы доказывается аналогично ■

• Доказанные теоремы устанавливают причины одновременной неразрешимости прямой и двойственной ЗЛП:



2

Если Целевая функция одной из пары двойственных задач не ограничена на множестве допустимых решений *то* Множество допустимых решений другой задачи тоже пусто *(Теорема 3)*

Примеры

① а)

(I) $f = x_1 + 2x_2 \to \max$ (II) $g = 6y_1 + 10y_2 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 6 \\ 6x_1 + 2x_2 = 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3y_1 + 6y_2 = 1 \\ y_1 + 2y_2 = 2 \end{cases}$$

Множество допустимых решений $D = \varnothing$, т.к. при умножении 1-го уравнения на 2- получим $6x_1 + 2x_2 = 10$. Система уравнений несовместна.

Множество допустимых решений $E = \varnothing$. Система уравнений несовместна

① б)

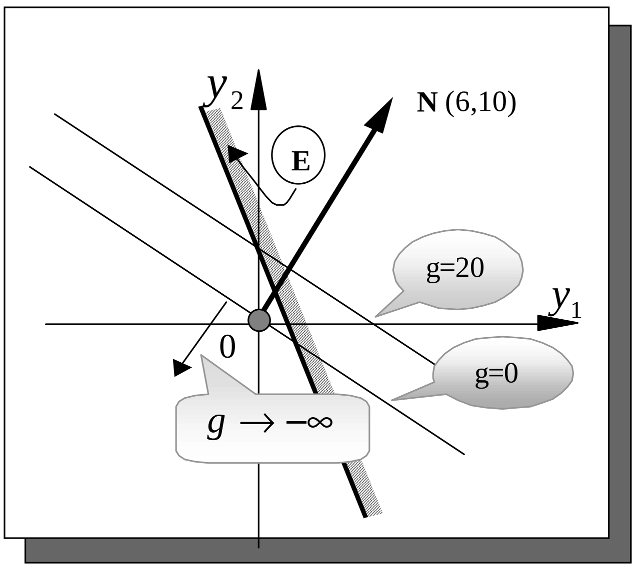
(I) $f = x_1 + 2x_2 \to \max$ (II) $g = 6y_1 + 10y_2 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 6 \\ 6x_1 + 2x_2 = 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3y_1 + 6y_2 \ge 1 \\ y_1 + 2y_2 \ge 2 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$

$D = \varnothing$

$E = \{(y_1, y_2) : y_1 + 2y_2 \ge 2\}$ - полуплоскость



Целевая функция **g** не ограничена на множестве решений

②

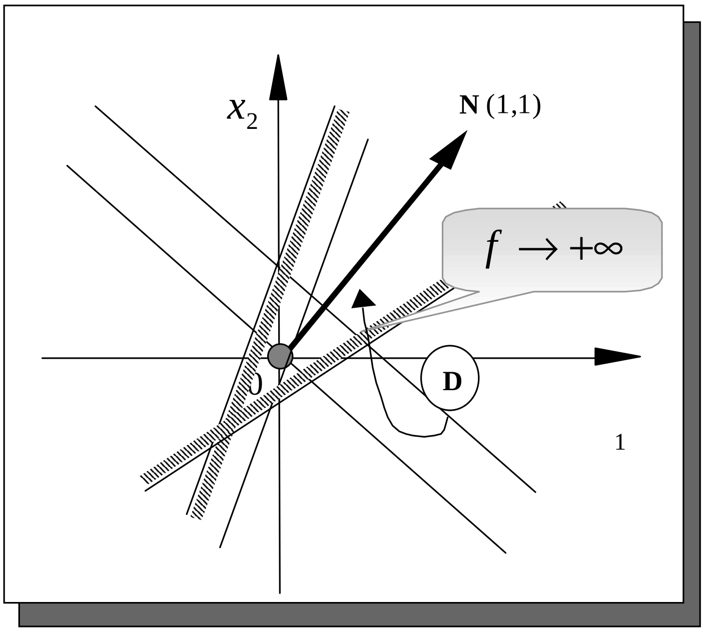
(I) $f = x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 - 2x_2 \le 2 \end{cases}$$

(II) $g = 2y_1 + 2y_2 \to \min$

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 = 1 \\ y_1 - 2y_2 = 1 \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0\ ,\ y_2 \ge 0$$



Система уравнений имеет единственное решение $y_1 = -1, y_2 = -1$, которое не удовлетворяет ограничениям неотрицательности

$$\boxed{E = \varnothing}$$

С помощью теории двойственности **можно оценить значение целевой функции ЗЛП**

Теорема 4

Пусть $D \ne \varnothing$. *Тогда* $\max \max\limits_{x \in D} f(X) \le \alpha \Leftrightarrow \exists Y_0$ *-допустимое решение ЗЛП (II):* $g(Y_0) \le \alpha$

Доказательство

⇨ ЗЛП (I) разрешима ($D \ne \varnothing$ и $f(X)$ - ограничена) $\Rightarrow$(по 1-ой теореме двойственности) ЗЛП (II) разрешима и $Y_0[M]$- ее оптимальное решение

⇦ ЗЛП (II) разрешима (т.к. по теореме 2 $D \ne \varnothing$ и $E \ne \varnothing$) $\Rightarrow$ ЗЛП (I) разрешима и по лемме 1 $\alpha \ge g(Y_0) \ge f(X)$, $\forall X \in D \Rightarrow \max\limits_{X \in D} f(X) \le \alpha$ ■

Пример

(I) $f = -2x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 \to \max$

$-x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 \le 10$

$x_i \ge 0$, $i \in 1:4$

(II) $g = 10y_1 \to \min$

$$\begin{cases} -y_1 \ge -2 \\ y_1 \ge 1 \\ 2y_1 \ge -1 \\ 5y_1 \ge 4 \end{cases}$$

$y_1 \ge 0$

$\tilde{y}_1 = 2$ является допустимым решение ЗЛП (II) и $g(\tilde{y}_1) = 20$. По теореме 4 $f_{\max}(X) \le 20$ и оценка для максимума f получена. (На самом деле $f_{\max}(X) = 10$, т.к. для ЗЛП (II) $E = \{ y_1 : 1 \le y_1 \le 2 \}$ и $g_{\min} = 10$).

Наконец рассмотрим утверждение, в котором приводятся необходимые и достаточные условия оптимальности имеющихся решений ЗЛП (I) и ЗЛП (II). Эти условия носят название **условий дополняющей нежесткости** и позволяют по оптимальному решению одной из пары двойственных задач найти оптимальное решение другой.

Теорема 5 (2-я теорема двойственности)

$X_0[N], Y_0[M]$ *-оптимальные решения задач (I) и (II) соответственно* $\Longleftrightarrow$

а) $\big(A[i,N] \cdot X_0[N] - b[i]\big) \cdot y_0[i] = 0, \quad \forall i \in M$

б) $\big(Y_0[M] \cdot A[M,j] - c[j]\big) \cdot x_0[j] = 0, \quad \forall j \in N$

условия дополняющей нежесткости

Доказательство

$$f(X_0) = \underbrace{C[N] \cdot X_0[N] \le \big(т.к.\ C[N] \le Y_0[M] \cdot A[M,N]\big) \le Y_0[M] \cdot A[M,N]}_{б)} \cdot X_0[N] =$$

$$= Y_0[M] \cdot A\underbrace{[M,N] \cdot X_0[N] \le (т.к. A[M,N] \cdot X_0 \le b[M]) \le Y_0}_{а)}[M] \cdot b[M] = g(Y_0)$$

Но по условию теоремы $f(X_0) = g(Y_0)$, т.к. X_0, Y_0 - оптимальные решения. Тогда в цепочке преобразований везде должен стоять знак равенства. В соответствии с выделенным, получаем

а) $Y_0[M] \cdot A[M,N] \cdot X_0[N] = Y_0[M] \cdot b[M] \quad \Rightarrow \quad Y_0[M] \cdot \big(A[M,N] \cdot X_0[N] - b[M]\big) = 0$

б) $C[N] \cdot X_0[N] = Y_0[M] \cdot A[M,N] \cdot X_0[N] \quad \Rightarrow \quad \big(Y_0[M] \cdot A[M,N] - b[M]\big) \cdot X_0[N] = 0$

Скалярная запись условий а) и б) следует из того, что оценки (выражения в скобках) равны нулю для базисных переменных, а если оценки отличны от нуля, то соответствующие им переменные являются небазисными (т.е. равны нулю).

В этом случае $X_0[N], Y_0[M]$ - допустимые решения ЗЛП (I) и ЗЛП (II) соответственно.

Запишем а) и б) в векторном виде

$$Y_0[M]\cdot\left(A[M,N]\cdot X_0[N]-b[M]\right)=0 \;\Rightarrow\; Y_0[M]\cdot A[M,N]\cdot X_0[N]=Y_0[M]\cdot b[M]=g(Y_0)$$

$$\left(Y_0[M]\cdot A[M,N]-b[M]\right)\cdot X_0[N]=0 \;\Rightarrow\; Y_0[M]\cdot A[M,N]\cdot X_0[N]=C[N]\cdot X_0[N]=f(X_0)$$

Так как равны левые части двух последних равенств, то равны и правые. Т.е.

$$f(X_0)=g(Y_0)$$

По 1-й теореме двойственности получаем, что $X_0[N], Y_0[M]$, - оптимальные решения прямой и двойственной ЗЛП соответственно ■

Информативным прочтением условий дополняющей нежесткости является следующее:

1) если переменная в исходной задаче $y_0[i], (x_0[j])$ отлична от нуля, то соответствующее ей ограничение в двойственной выполняется как равенство

$$A[i,N]\cdot X_0[N]=b[i] \quad (Y_0[M]\cdot A[M,j]=c[j])$$

2) если ограничение в исходной задаче выполняется как строгое неравенство

$$A[i,N]\cdot X_0[N]<b[i] \quad (Y_0[M]\cdot A[M,j]>c[j])$$

то соответствующая ей переменная в двойственной задаче $y_0[i], (x_0[j])$ равна нулю.

• Заметим, что при равенстве нулю одного из сомножителей в условиях дополняющей нежесткости о величине второго сомножителя ничего сказать нельзя •

Примеры

Сначала поясним до конца пример 1 (см. также замечание после примеров к постановке двойственных задач)

(I) $f=7x_1+3x_2-x_3+2x_4\to\max$

$$\begin{cases}2x_1+x_2+4x_3-x_4\le 9\\ x_1+x_2-x_3+x_4=7\end{cases}$$

$$x_2\ge 0,\quad x_4\ge 0$$

(II) $g=9y_1+7y_2\to\min$

$$\begin{cases}2y_1+y_2=7\\ y_1+y_2\ge 3\\ 4y_1-y_2=-1\\ -y_1+y_2\ge 2\end{cases}$$

$$y_1\ge 0$$

Находим решение ЗЛП (II):

$$\begin{cases}2y_1+y_2=7\\ 4y_1-y_2=-1\end{cases} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y_1=1; & y_1+y_2=1+5=6\ge 3\\ y_2=5; & -y_1+y_2=-1+5=4\ge 2\end{matrix}\right\}$$

$$y_1=1\ge 0$$

Оптимальное решение ЗЛП (II)

$$y_1=1, y_2=5, g_{\min}=9\cdot 1+7\cdot 5=44$$

Из условий дополняющей нежесткости имеем

а) $y_1(2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 - 9) = 0$ т. к. $y_1 > 0$, то

$y_2(x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 7) = 0$ т. к. $y_2 > 0$, то

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 9 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 7 \end{cases} \qquad (*)$$

б) $(y_1 + y_2 - 3) \cdot x_2 = 0$ т. к. $y_1 + y_2 = 1 + 5 > 3$, то $x_2 = 0$

$(-y_1 + y_2 - 2) \cdot x_4 = 0$ т. к. $-y_1 + y_2 = -1 + 5 > 2$, то $x_4 = 0$

Подставляя $x_2 = 0$ и $x_4 = 0$ в систему уравнений (*) имеем

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_3 = 9 \\ x_1 - x_3 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = -5/6, \; x_1 = 37/6, \quad f_{\max} = 7 \cdot 37/6 + 5/6 = 44 \end{cases}$$

Оптимальное решение ЗЛП (I)

⑥

(I) $f = 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 2x_5 \to \min$

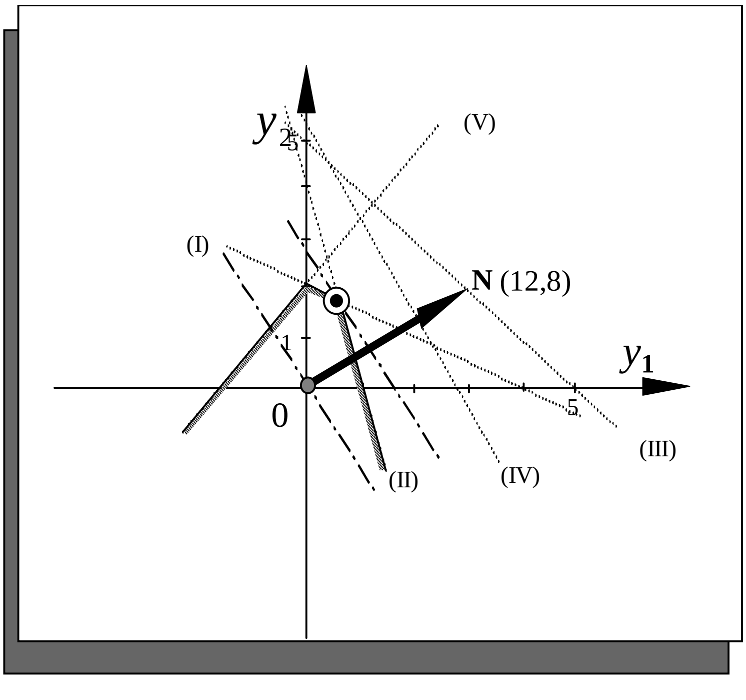
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 - x_5 = 12 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i \in 1:5$$

(II) $g = 12y_1 + 8y_2 \to \max$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \leq 4 \\ 3y_1 + y_2 \leq 6 \\ y_1 + y_2 \leq 5 \\ 5y_1 + y_2 \leq 5 \\ -y_1 + y_2 \leq 2 \end{cases}$$

Решим задачу (II) графическим способом



$$Y^*_{опт}: \begin{cases} y_1 + 2y_2 \leq 4 \\ 5y_1 + y_2 \leq 5 \end{cases} \Rightarrow \; y_2 = 5/3, \quad y_1 = 2/3$$

$$g_{\max} = 12 \cdot 2/3 + 8 \cdot 5/3 = 64/3$$

Для нахождения оптимального решения задачи (I) применим условия дополняющей нежесткости в форме б).

Так как 2, 3, 5-е неравенства выполняются как строгие, то имеем

$$\left.\begin{aligned}
&(\underbrace{3y_1+y_2-6}_{>0})\cdot x_2=0 \quad \Rightarrow x_2=0\\
&(\underbrace{y_1+y_2-5}_{>0})\cdot x_3=0 \quad \Rightarrow x_3=0
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad X^*_{опт}:\begin{cases} x_1+5x_4=12 & x_4=16/9\\ 2x_1+x_4=8 & x_1=28/9\end{cases}$$

$$(\underbrace{-y_1+y_2-2}_{>0})\cdot x_5=0 \quad \Rightarrow x_5=0 \qquad f_{\min}=4\cdot 28/9+5\cdot 16/9=192/9=64/3$$