5.11. Матричная транспортная задача (ТЗ)

Закрытая ТЗ формулируется как ЗЛП следующего вида:

$$f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c[i, j] \cdot x[i, j] \to \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x[i, j] = a[i], & i \in 1:m \\ \sum_{i=1}^{m} x[i, j] = b[j], & j \in 1:n \end{cases}$$

$$x[i, j] \ge 0, \quad i \in 1:m, \; j \in 1:n$$

где

$a[i]$ - запас i*-го* поставщика

$b[j]$ - потребность j*-го* потребителя

$c[i, j]$ - цена перевозки единицы продукции по коммуникациям (i, j) (от i*-го* поставщика к j*-му* потребителю)

$x[i, j]$ - объем перевозки продукции (неизвестный) по коммуникации (i, j).

Для вывода критерия оптимальности ТЗ построим двойственную задачу. Структура матрицы системы ограничений ТЗ такова (см.п.4.2.), что столбец, соответствующий переменной $x[i, j]$ содержит ровно два ненулевых элемента: единицу в строке с номером i и единицу в строке $m+i$. Вектор двойственных переменных

$$Y = \left(u[1], \cdots, u[m], v[1], \cdots, v[n]\right)$$

имеет $m+n$ компонент (по числу ограничений ТЗ), которые называются **потенциалами**: переменные $u[1], u[2], \cdots, u[m]$ - потенциалы поставщиков; переменные $v[1], v[2], \cdots, v[n]$ - потенциалы потребителей.

Используя схему для построения двойственной задачи к ЗЛП в стандартной форме, имеем.

$$g = \sum_{i=1}^{m} a[i] \cdot u[i] + \sum_{j=1}^{n} b[j] \cdot v[j] \to \max$$

$$\left\{ u[i] + v[j] \le c[i, j], \quad i \in 1:m, \; j \in 1:n \right.$$

В полученной двойственной задаче $m \cdot n$ ограничений, соответствующих каждой переменной $x[i, j]$ ТЗ. Вспоминая, что невязка между левой и правой частью в ограничении двойственной задачи есть оценка для соответствующей переменной исходной задачи (см. подраздел 5.10) запишем **условия оптимальности текущего плана перевозок в ТЗ**:

$$\varepsilon[i, j] = u[i] + v[j] - c[i, j] \leq 0, \quad \forall i \in 1:m, \ j \in 1:n$$

или

$$u[i] + v[j] \leq c[i, j], \quad \forall i \in 1:m, \ j \in 1:n$$

Неизвестные потенциалы $u[i]$ и $v[j]$ (их общее количество равно $m+n$) могут быть найдены (и именно так отыскиваются) из условия равенства нулю оценок для базисных переменных (заполненных клеток таблицы) ТЗ (таких равенств ($m+n-1$), что следует из замечания ниже).

$$u[i] + v[j] \leq c[i, j]$$, *для заполненных клеток* (*i , j*) *таблицы ТЗ.*

Решение полученной системы (содержащей неизвестных на единицу больше, чем число уравнений) ищется, когда одно из неизвестных (вообще говоря, любое) полагается равным некоторому числу (тоже, вообще говоря, любому). После этого оставшаяся система имеет единственное решение.

• Ранг матрицы системы ограничений ТЗ равен $m+n-1$. Это следует из того, что при сложении всех строк матрицы, соответствующих первой группе ограничений (см. п.4.2.) получается строка из единиц. Такая же строка получится при сложении всех строк второй группы. Отсюда следует, что нет подматрицы матрицы *A* порядка $m+n$ с определителем отличным от нуля (в миноре будет 2 одинаковые строки, что соответствует определителю равному нулю). Тогда

$$rank\ A \leq m+n-1$$

А подматрицу порядка $m+n-1$ с определителем отличным от нуля, можно получить взяв из каждой (кроме последней) группы столбцов (см. матрицу в п.4.2.) по одному, а последнюю группу целиком и вычеркнув строку с номером m. Получится квадратная верхняя треугольная матрица порядка $m+n-1$ с единицами на главной диагонали. Определитель такой матрицы равен 1. Значит

$$rank\ A = m+n-1$$

А если это так, то число базисных компонент в любом базисном решении должно быть равно $m+n-1$ •

Рассмотрим теперь вопрос о разрешимости закрытой ТЗ. Докажем следующее

Утверждение

Закрытая ТЗ всегда разрешима.

Доказательство

Необходимо установить следующее:

а) закрытая ТЗ имеет хотя бы одно допустимое решение

б) целевая функция ТЗ ограничена снизу

а) Проверим, что $x[i, j] = \dfrac{a[i] \cdot b[j]}{M}$ $\left(M = \sum_{i=1}^{m} a[i] = \sum_{j=1}^{n} b[j] \right)$

является допустимым решением закрытой ТЗ. Неотрицательность очевидна, т.к. $a[i] > 0$, $b[j] > 0$, $M > 0$.

Подставим предъявленное решение в произвольное ограничение 1-й группы

$$\sum_{j=1}^{n} x[i, j] = \sum_{j=1}^{n} \frac{a[i] \cdot b[j]}{M} = \frac{a[i]}{M} \sum_{j=1}^{n} b[j] = \frac{a[i]}{M} \cdot M = a[i]$$

и в ограничения 2-й группы

$$\sum_{i=1}^{m} x[i, j] = \sum_{i=1}^{m} \frac{a[i] \cdot b[j]}{M} = \frac{b[j]}{M} \sum_{i=1}^{m} a[i] = \frac{b[j]}{M} \cdot M = b[j]$$

Всем ограничения ТЗ предъявленное решение удовлетворяет, и, следовательно, является допустимым решением ТЗ.

б) Выберем $C_0 = \min\{c[i, j], i \in 1:m,\ j \in 1:n\}$- наименьшую цену перевозки. Заменим в целевой функции ТЗ все коэффициенты на C_0. Тогда получим

$$f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c[i, j] \cdot x[i, j] \geq C_0 \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} x[i, j] \right) = C_0 \sum_{i=1}^{m} a[i] =$$

$$= C_0 \cdot M \cong M_0 = const$$

Т.е. целевая функция ТЗ ограничена снизу константой M_0. ■