5.3. Выпуклость множества допустимых решений ЗЛП

Множество V называется выпуклым, если оно вместе с любыми двумя своими точками целиком содержит отрезок, их соединяющий. Другими словами из условий

$$x_1 \in V, x_2 \in V \Rightarrow x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in V, \quad \forall\ 0 \le \lambda \le 1$$

Имеет место следующее **утверждение:**

Множество D допустимых решений ЗЛП является выпуклым

<u>*Доказательство*</u>

Возьмем два произвольных допустимых решения $X_1[N], X_2[N] \in D$

$$X_1[N] \in D \Leftrightarrow A[M,N] \cdot X_1[N] = b[M], \quad X_1[N] \ge \boldsymbol{0}[N]$$

$$X_2[N] \in D \Leftrightarrow A[M,N] \cdot X_2[N] = b[M], \quad X_2[N] \ge \boldsymbol{0}[N]$$

Рассмотрим $X[N] = \lambda X_1[N] + (1-\lambda) X_2[N]$, $(0 \le \lambda \le 1)$

Покажем, что $X[N] \in D$

1) $A[M,N] \cdot X[N] = A[M,N] \cdot \left(\lambda X_1[N] + (1-\lambda) X_2[N]\right) =$

$= \lambda A[M,N] \cdot X_1[N] + (1-\lambda) A[M,N] \cdot X_1[N] =$

$= \lambda b[M] + (1-\lambda) b[M] = b[M](\lambda + 1 - \lambda) = b[M]$

2) т. к. $X_1[N] \ge \boldsymbol{0}[N]$ и $\lambda \ge 0 \ \Rightarrow \ \lambda X_1[N] \ge \boldsymbol{0}[N]$

$X_2[N] \ge \boldsymbol{0}[N]$ и $(1-\lambda) \ge 0 \ \Rightarrow \ (1-\lambda) X_2[N] \ge \boldsymbol{0}[N]$

$\Rightarrow X[N] = \lambda X_1[N] + (1-\lambda) X_2[N] \ge \boldsymbol{0}[N]$ ■

Крайней точкой (угловой точкой или вершиной) выпуклого множества D называется точка X данного множества не представимая в виде

$$X = \frac{1}{2} X_1 + \frac{1}{2} X_2, \text{ где } X_1, X_2 \in D \quad (*)$$

• Любую точку выпуклого множества (кроме вершин) можно представить как середину отрезка с концами, лежащими в данном множестве, т.е. в виде (*)см.рисунок) •