5.4. Характеристика угловых точек

Каждое допустимое решение ЗЛП является некоторой точкой множества D (см. (+)). Оказывается вершинам данного выпуклого множества соответствуют базисные решения ЗЛП (см. Рис.)

Утверждение

$$X_0[N] \text{- базисное решение ЗЛП}$$

$$\Updownarrow$$

$$X_0[N] \text{-угловая точка множества допустимых решений } D$$

<u>*Доказательство*</u>

Пусть N' - базисное множество, соответствующее решению X_0 и

$X_0[N]$ - невырожденное базисное решение ($X_0[N'] \geq \mathbf{0}[N']$)

Не уменьшая общности можно считать, что $N' = \{1, 2, \cdots, m\}$ (в противном случае можно перенумеровать неизвестные).

$\Rightarrow$ (от противного) Пусть $X_0[N]$ - невырожденное базисное решение и предположим, что $X_0[N]$ представимо в виде (*), т.е.

$$X[N] = \frac{1}{2} X_1[N] + \frac{1}{2} X_2[N] \text{ , где } X_1[N], X_2[N] \in D$$

Очевидно, что $X_1[N \setminus N'] = X_2[N \setminus N'] = \mathbf{0}[N \setminus N']$, т.к. в противном случае, $\exists\ i \in N \setminus N' : x_0[i] > 0$. Последнее невозможно в силу того, что $X_0[N \setminus N'] = \mathbf{0}[N \setminus N']$ как небазисная часть базисного решения $X_0[N]$.

Таким образом, представление для X_0 можно записать для $N' \subset N$

$$X[N'] = \frac{1}{2} X_1[N'] + \frac{1}{2} X_2[N'], \; X_1[N'] \neq X_2[N'];$$

В силу допустимости решений $X_1[N]$ и $X_2[N]$ можно записать.

$$A[M, N] \cdot X_1[N] = A[M, N'] \cdot X_1[N'] = b[M]$$

$$A[M, N] \cdot X_2[N] = A[M, N'] \cdot X_2[N'] = b[M]$$

Вычитая из первого равенства второе, и используя обозначение

$$\lambda[N'] = X_2[N'] - X_1[N'] \neq \mathbf{0}[N']$$

получаем

$$A[M, N'] \cdot \lambda[N'] = \mathbf{0}[M], \; \lambda[N'] \neq \mathbf{0}[N'] \quad \textbf{!!!}$$

линейную зависимость столбцов матрицы $A[M, N']$, что противоречит базисности матрицы $A[M, N']$. Следовательно, неверным является исходное предположение о представимости $X_0[N]$ в виде (*) и, таким образом, $X_0[N]$ является вершиной множества D.

Пусть теперь $X_0[N]$ - вершина множества D и **предположим, что столбцы матрицы** $A[M,N']$ **- линейно зависимы**, т.е. $\exists\ \lambda[N'] \neq \mathbf{0}[N']$:

$$A[M,N'] \cdot \lambda[N'] = \mathbf{0}[M] \quad (**)$$

Рассмотрим вектор $\lambda[N] = (\lambda[N'],\ \mathbf{0}[N \setminus N'])$. Очевидно, что

$$A[M,N] \cdot \lambda[N] = A[M,N'] \cdot \lambda[N'] + A[M,N \setminus N'] \cdot \mathbf{0}[N \setminus N'] = \mathbf{0}[M]$$

Возьмем число $\varepsilon > 0$ настолько малым, что неотрицательность векторов $X_1[N] = X_0[N] + \varepsilon \cdot \lambda[N]$ и $X_2[N] = X_0[N] - \varepsilon \cdot \lambda[N]$ будет иметь место (положительные компоненты вектора могут уменьшится только до нуля).

Теперь нетрудно убедиться в допустимости решений ЗЛП $X_1[N]$ и $X_2[N]$, т.к. в силу (**)

$$A[M,N] \cdot X_1[N] = A[M,N'] \cdot X_0[N'] + \varepsilon \cdot A[M,N] \cdot \lambda[N] = b[M] + \varepsilon \cdot \mathbf{0}[M] = b[M]$$

$$A[M,N] \cdot X_2[N] = A[M,N'] \cdot X_0[N'] - \varepsilon \cdot A[M,N] \cdot \lambda[N] = b[M] - \varepsilon \cdot \mathbf{0}[M] = b[M]$$

Из определения векторов $X_1[N]$ и $X_2[N]$ следует, что

$$X[N] = \frac{1}{2} X_1[N] + \frac{1}{2} X_2[N], \text{ и } X_1[N], X_2[N] \in D \text{ !!!}$$

Последнее представление противоречит условию теоремы о том, что $X_0[N]$ - вершина множества D. Следовательно, неверным является исходное предположение о линейной зависимости столбцов матрицы $A[M,N']$ и, на самом деле, $X_0[N]$ является базисным решением ЗЛП. ■