5.5. Достижимость оптимального решения ЗЛП в угловой точке множества допустимых решений

Допустимое решение ЗЛП $X^*[N]$ является **оптимальным решением ЗЛП** (I), если $\forall$ допустимого решения ЗЛП $X[N]$

$$f(X^*) \geq f(X)$$

Здесь мы докажем, что **среди оптимальных решений ЗЛП всегда есть вершина множества D**. Это утверждение позволяет искать оптимальное решение ЗЛП только среди базисных решений. Для доказательства этого утверждения, нам понадобится следующая **лемма**, которую мы сформулируем для случая выпуклого многогранника (ограниченного выпуклого многогранного множества).

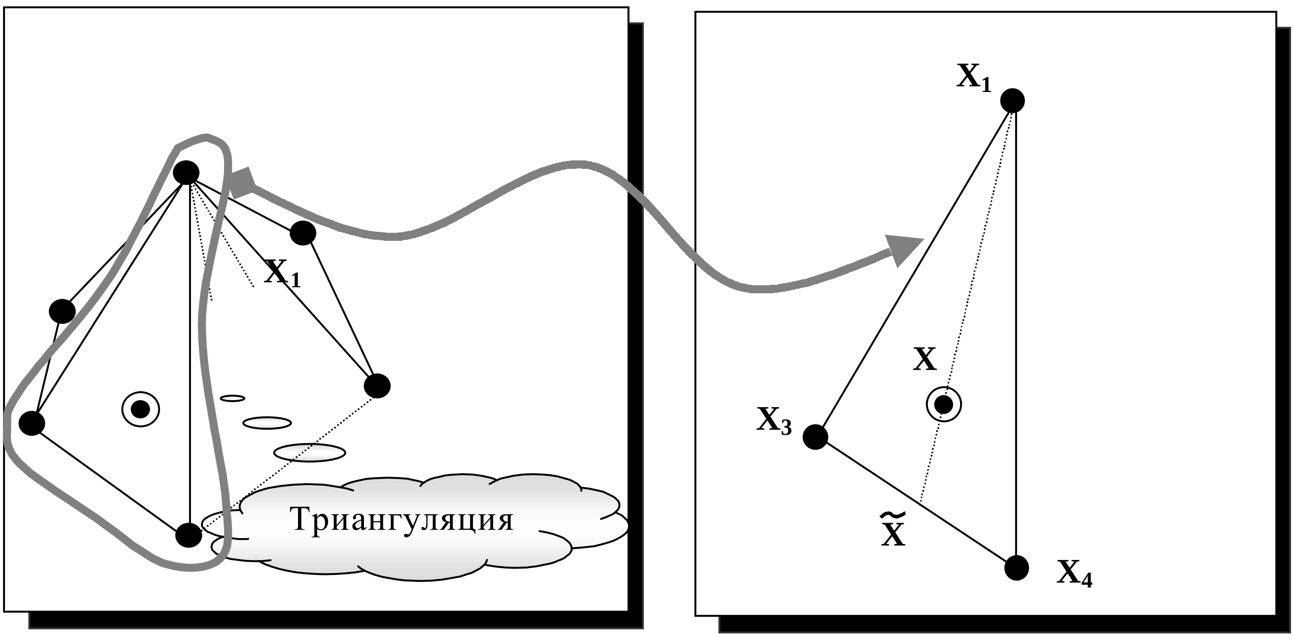
Любая точка выпуклого многогранника может быть представлена в виде выпуклой линейной комбинации его вершин.

- Линейная комбинация векторов $\{X_1[N], \cdots, X_s[N]\}$

$$\sum_{i=1}^{s} \lambda[i] \cdot X_i[N]$$

называется выпуклой, если 1) $\lambda[i] \geq 0$, $(i \in 1:s)$ 2) $\sum_{i=1}^{s} \lambda[i] = 1$.

Проиллюстрируем доказательство леммы для плоского многоугольника. Пусть D - выпуклый многоугольник на плоскости с вершинами $\{X_1, X_2, \cdots, X_p\}$ и пусть $X \in D$ - произвольная точка этого множества. Произведем триангуляцию D (его разбиение на непересекающиеся треугольники), соединив, например X_1, со всеми остальными вершинами (см. Рис.).



Тогда точка X попадет в один из элементов триангуляции (пусть это будет треугольник $X_1 X_3 X_4$, как на рисунке). Тогда точка X лежит на отрезке $[X_1, \widetilde{X}]$ и, следовательно, является выпуклой линейной комбинацией точек X_1 и $\widetilde{X}$.

$$X = \alpha X_1 + (1-\alpha)\widetilde{X}\ ,\ (0 \le \alpha \le 1)\quad (*)$$

Но точка $\widetilde{X}$, в свою очередь, лежит на отрезке $[X_3, X_4]$ и может быть представлена в виде

$$\widetilde{X} = \beta X_3 + (1-\beta) X_4\ ,\ (0 \le \beta \le 1)$$

Подставляя $\widetilde{X}$ из последнего равенства в (*) находим

$$X = \alpha X_1 + (1-\alpha)[\beta X_3 + (1-\beta)X_4] = \alpha X_1 + (1-\alpha)\beta X_3 + (1-\alpha)(1-\beta)X_4 =$$

$$= \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_3 + \lambda_3 X_4$$

Правая часть полученного соотношения есть линейная комбинация вершин. Убедимся в ее выпуклости.

1) $\lambda_1 = \alpha \ge 0$, $\lambda_2 = (1-\alpha)\beta \ge 0$, $\lambda_3 = (1-\alpha)(1-\beta) \ge 0$

2) $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \alpha + (1-\alpha)\beta + (1-\alpha)(1-\beta) = \alpha + (1-\alpha)(\cancel{\beta} + 1 - \cancel{\beta}) = \cancel{\alpha} + 1 - \cancel{\alpha} = 1$

Лемма доказана.

Теперь переходим к доказательству утверждения (для случая выпуклого многогранника).

Пусть $X^*[N]$ - оптимальное решение ЗЛП и $\{X_1[N], \cdots, X_p[N]\}$ - вершины множества D. Согласно лемме

$$X^*[N] = \lambda[1] \cdot X_1[N] + \cdots + \lambda[p] \cdot X_p[N]$$

Подставим $X^*[N]$ в целевую функцию ЗЛП

$$f(X^*) = \lambda[1] \cdot f(X_1) + \cdots + \lambda[p] \cdot f(X_p)$$

Выберем среди вершин ту, на которой достигается наибольшее (среди всех вершин) значение целевой функции. Пусть это будет вершина $X_k[N]$: $f(X_k) \ge f(X_i)$, $i \in 1:p$.

Тогда, заменяя в правой части последнего равенства $f(X_i)$ на $f(X_k)$ $i \in 1:p$, имеем

$$f(X^*) \le \lambda[1] \cdot f(X_k) + \cdots + \lambda[p] \cdot f(X_k) = f(X_k) \cdot \sum_{i=1}^{p} \lambda[i] = f(X_k)$$

С другой стороны, $f(X^*) \ge f(X_k)$ в силу оптимальности $X^*[N]$. Таким образом окончательно получим $f(X^*) = f(X_k)$, т.е. вершина $X_k[N]$ тоже является оптимальным решением ЗЛП. ■