5.7. Критерий оптимальности

Рассмотрим базисное решение ЗЛП с базисом $N' \subset N$

$$X_0[N] = (X_0[N'],\ \mathbf{0}[N \setminus N'])$$

и произвольное допустимое решение $X[N]$, в котором выделим части относящиеся к множествам индексов N' и $N \setminus N'$

$$X[N] = (X[N'], X[\ N \setminus N'])$$

Так как $X[N]$ - допустимое решение ЗЛП, то

$$A[M,N] \cdot X[N] = A[M,N'] \cdot X[N'] + A[M,N \setminus N'] \cdot X[N \setminus N'] = b[M]$$

Умножим последнее равенство слева на матрицу обратную к базисной

$$B[N',M] \cdot A[M,N'] \cdot X[N'] + B[N',M] \cdot A[M,N \setminus N'] \cdot X[N \setminus N'] =$$

$= B[N',M] \cdot b[M]$ или $X[N'] = B[N',M] \cdot b[M] - Z[N',N \setminus N'] \cdot X[N \setminus N']$

Используя полученное выражение, вычислим значение целевой функции на решении $X[N]$

$$f(X) = C[N] \cdot X[N] = C[N'] \cdot X[N'] + C[N \setminus N'] \cdot X[N \setminus N'] =$$

$$= C[N'] \cdot B[N',M] \cdot b[M] - (C[N'] \cdot Z[N',N \setminus N'] - C[N \setminus N']) \cdot X[N \setminus N']$$

Введем обозначение

$\varepsilon[N] = C[N'] \cdot Z[N',N] - C[N]$ - **вектор оценок текущего базисного решения** $X_0[N]$

• Легко видеть, что (см. Определение $Z[N',N]$ в п. 5.1.)

$$\varepsilon[N] = (\varepsilon[N'], \varepsilon[N \setminus N']) = (C[N'] \cdot Z[N',N'] - C[N'], C[N'] \cdot Z[N',N \setminus N'] -$$

$$- C[N \setminus N']) = (\mathbf{0}[N'], \varepsilon[N \setminus N'])$$

Т.о. **оценки базисных переменных всегда равны нулю!** •

С учетом введенных обозначений имеем

$$f(X) = C[N'] \cdot B[N',M] \cdot b[M] - \varepsilon[N \setminus N'] \cdot X[N \setminus N']$$

Подставляя в последнее равенство $X_0[N]$ вместо $X[N]$ находим

$f(X_0) = C[N'] \cdot B[N',M] \cdot b[M]$ (т.к. $X[N \setminus N'] = \mathbf{0}[N \setminus N']$)

(это равенство можно получить также, определив $X_0[N']$ из системы ограничений $A[M,N'] \cdot X_0[N'] = b[M]$, путем умножения ее на $B[N',M]$

$X_0[N'] = B[N',M] \cdot b[M]$ и вычислив значение целевой функции).

Окончательно получим соотношение

$$f(X) = f(X_0) - \varepsilon[N \setminus N'] \cdot X[N \setminus N']$$

Из данной формулы следует, что неравенство

$$f(X_0) \geq f(X)$$

будет выполнено для любого допустимого $X[N]$, если

$\varepsilon[N \setminus N'] \cdot X[N \setminus N'] \geq \mathbf{0}[N \setminus N']$.

А т.к. $X[N \setminus N'] \geq \mathbf{0}[N \setminus N']$, то достаточно выполнения неравенства

$$\varepsilon[N \setminus N'] \geq \mathbf{0}[N \setminus N']$$

Таким образом нами получено следующее **условие оптимальности текущего базисного решения**:

Если все компоненты вектора оценок $\varepsilon[N]$ *неотрицательны,*

т. е. $\varepsilon[j] \geq 0 \quad \forall \ j \in N$,

то текущее базисное решение является оптимальным решением ЗЛП.

Пример. Рассмотрим ЗЛП

$$f = 2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + x_4 = 5 \\ \qquad x_2 + x_3 \quad + 2x_4 = 8 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \ i \in 1:4$$

Пусть $N' = \{1 \ , \ 3\}$, $A[M,N'] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B[N',M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $X_0[N] = (5,0,8,0)$,

$Z[N',N] = B[N',M] \cdot A[M,N'] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$C[N] = (2,1,5,-1)$, $C[N'] = (2 \ , \ 5)$

Вычисляем компоненты вектора оценок $\varepsilon[j] = C[N'] \cdot Z[N', j] - c[j]$

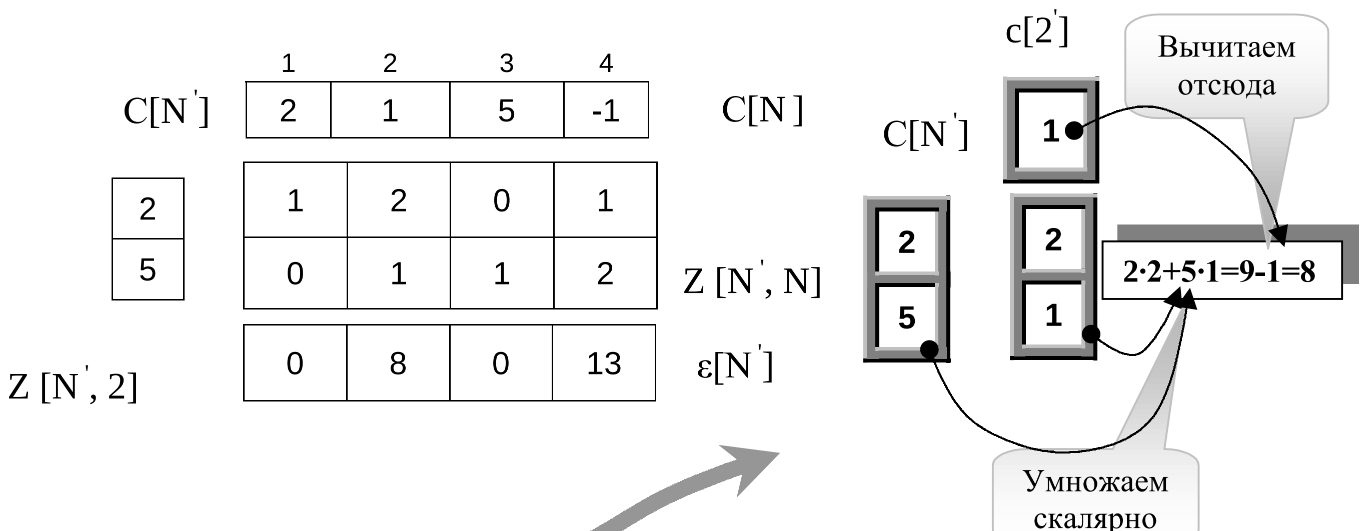

Схема вычисления $\varepsilon[2]$:

Получаем, что $\varepsilon[N] = (0,8,0,13) \geq (0,0,0,0)$. Критерий оптимальности выполняется, а следовательно, текущее базисное решение является оптимальным и максимальное значение целевой функции равно

$$f_{MAX} = 2 \cdot 5 + 5 \cdot 8 = 50$$