5.8. Улучшение текущего базисного решения ЗЛП. Критерий неограниченности целевой функции на множестве решений

Пусть для текущего базисного решения $X_0[N]$ с базисом N' нарушается условие оптимальности, т.е.

$$\varepsilon[j_0] < 0, \; j_0 \in N \setminus N'$$

Разобьем множество индексов $N \setminus N'$ на две непересекающиеся части
$N \setminus N' = \{j_0\} \cup N_0$, где $N_0 = (N \setminus N') \setminus \{j_0\}$
Предъявим теперь в качестве направления улучшения решения вектор
$$Z[N] = Z[N'], z[j_0], Z[N_0]) = (B[N', M] \cdot A[M, j_0], \; -1, \; \mathbf{0}[N_0]) \quad (*)$$
и выясним, при каких условиях вектор

$$X_\theta[N] = X_0[N] - \theta \cdot Z[N], \; \theta > 0 \text{-числовой параметр}$$

будет допустимым решением ЗЛП

Подставим $X_\theta[N]$ в систему ограничений ЗЛП

$A[M, N] \cdot X_\theta[N] = A[M, N] \cdot X_0[N] - \theta \cdot A[M, N] \cdot Z[N] = b[M]$ т.к.

$A[M, N] \cdot X_0[N] = b[M]$, то для того, чтобы $X_\theta[N]$ удовлетворял системе ограничений, необходимо чтобы вектор $Z[N]$ был решением однородной системы

$$A[M, N] \cdot Z[N] = \boldsymbol{0}[M]$$

В соответствии с определением вектора $Z[N]$ имеем

$$A[M, N] \cdot B[N', M] \cdot A[M, j_0] + A[M, j_0] \cdot (-1) + A[M, j_0] \cdot \mathbf{0}[N_0] =$$
$$= A[M, j_0] - A[M, j_0] = \boldsymbol{0}[M]$$

Так как $X_\theta[N]$ удовлетворяет системе ограничений ЗЛП, то для допустимости необходима только его неотрицательность.

$$X_\theta[N] = X_0[N] - \theta \cdot Z[N] \geq \boldsymbol{0}[N]$$

Предположим сначала, что все компоненты вектора $Z[N]$ неположительны, что с учетом (*) означает $\quad Z[N'] = B[N', M] \cdot A[M, j_0] \leq \mathbf{0}[N']$

В этом случае $-\theta \cdot Z[N] \geq \boldsymbol{0}[N] \;\; \forall \theta > 0$ и $X_0[N] - \theta \cdot Z[N] \geq \boldsymbol{0}[N] \;\; \forall \theta > 0$

Т.е. $X_\theta[N]$ - допустимое решение ЗЛП при любом положительном значении параметра θ. Значение целевой функции на решении $X_\theta[N]$ равно

$$f(X_\theta) = C[N] \cdot X_0[N] - \theta \cdot C[N] \cdot Z[N] =$$
$$= f(X_0) - \theta \cdot (C[N'] \cdot Z[N'] - c[j_0]) = f(X_0) - \theta \cdot \varepsilon[j_0]$$ Легко видеть, что при $\theta \to +\infty$, $f(X_\theta) \to +\infty$, т.е. **в случае неположительности вектора $Z[N']$ целевая функция неограничена на множестве решений ЗЛП**.

Сформулируем условие неограниченности целевой функции на множестве допустимых решений

Если при $\varepsilon[j_0] < 0$, все компоненты столбца j_0 матрицы $Z[N', N]$:

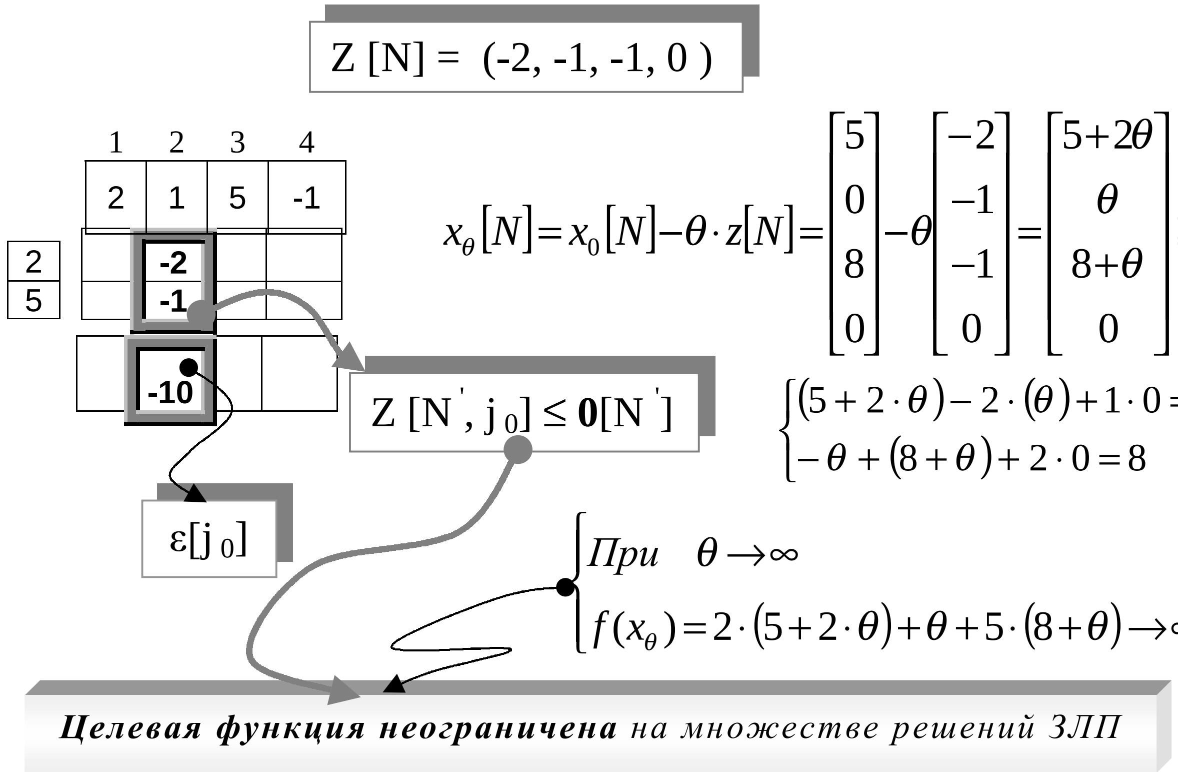
$Z[N', j_0] = B[N', M] \cdot A[M, j_0]$ *меньше либо равны нулю, то целевая функция неограничена на множестве допустимых решений ЗЛП.*

Пример. Несколько видоизменим исходные данные в ЗЛП предыдущего примера

$$f = 2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \qquad\qquad + x_4 = 5 \\ \quad - x_2 + x_3 \quad + 2x_4 = 8 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i \in 1:4$$



$$x_\theta[N] = x_0[N] - \theta \cdot z[N] = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} - \theta \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+2\theta \\ \theta \\ 8+\theta \\ 0 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} (5 + 2 \cdot \theta) - 2 \cdot (\theta) + 1 \cdot 0 = 5 \\ -\theta + (8 + \theta) + 2 \cdot 0 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{При} \quad \theta \to \infty \\ f(x_\theta) = 2 \cdot (5 + 2 \cdot \theta) + \theta + 5 \cdot (8 + \theta) \to \infty \end{cases}$$

Значит **для возможности улучшения текущего базисного решения необходимо наличие хотя бы одной положительной компоненты вектора** $Z[N'] = B[N', M] \cdot A[M, j_0]$ (или, что то же самое, столбца $Z[N', j_0]$ матрицы $Z[N', N]$).

Обозначим множество индексов положительных компонент указанного вектора через N_+.

$$N_+ = \{ j \in N' : z[i] = B[i, M] \cdot A[M, j_0] > 0 \}$$

Среди компонент вектора $X_\theta[N]$ отрицательными могут стать только компоненты с индексами из N_+

$$X_\theta[N_+] = X_0[N_+] - \theta \cdot Z[N_+]$$

(базисная компонента $x_0[i]$ текущего решения уменьшается на величину $-\theta \cdot z[i]$).

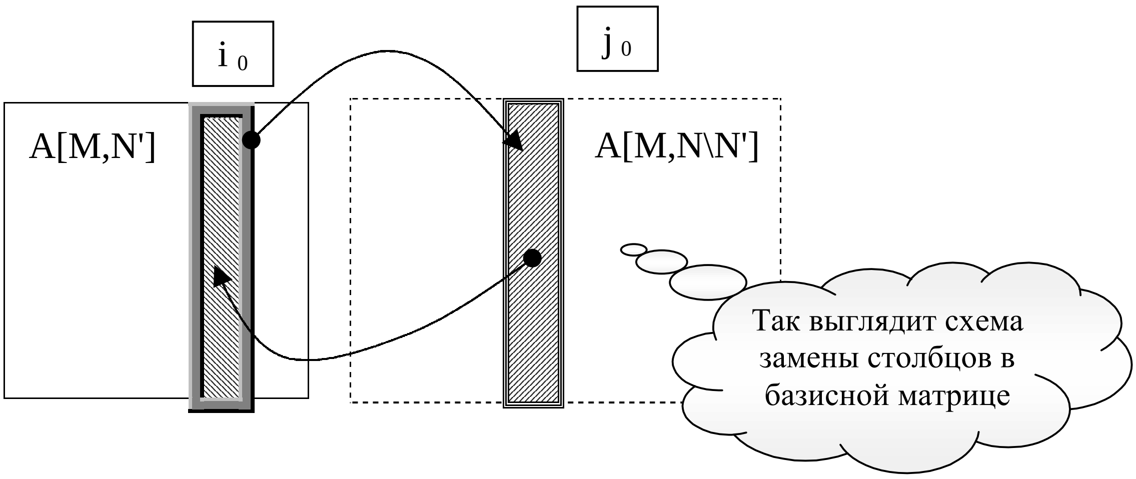
Тогда, для сохранения допустимости решения $X_\theta[N]$, необходимо **выбирать параметр** θ из условия

$$\theta \le \frac{x_0[i]}{z[i]}, \text{ для всех } i \in N_+$$

по правилу

$$\theta = \min\left\{\frac{x_0[i]}{z[i]} : i \in N_+\right\} = \frac{x_0[i_0]}{z[i_0]} \qquad (+)$$

При этом **будет обеспечена и неизменность числа базисных компонент решения** $X_\theta[N]$ *(в новом решении компонента* $x_\theta[i_0]$ *обратится в нуль, т..е. выйдет из числа базисных, а компонента* $x_\theta[j_0] = \theta > 0$ *станет базисной). Такой переход к решению* X_θ *соответствует замене в базисе* $A[M, N']$ *столбца* $A[M, i_0]$ *на столбец* $A[M, j_0]$ *(т.е. замене базисного множества индексов* N' *на* $N_1' = N' \setminus \{i_0\} \cup \{j_0\}$ *).*

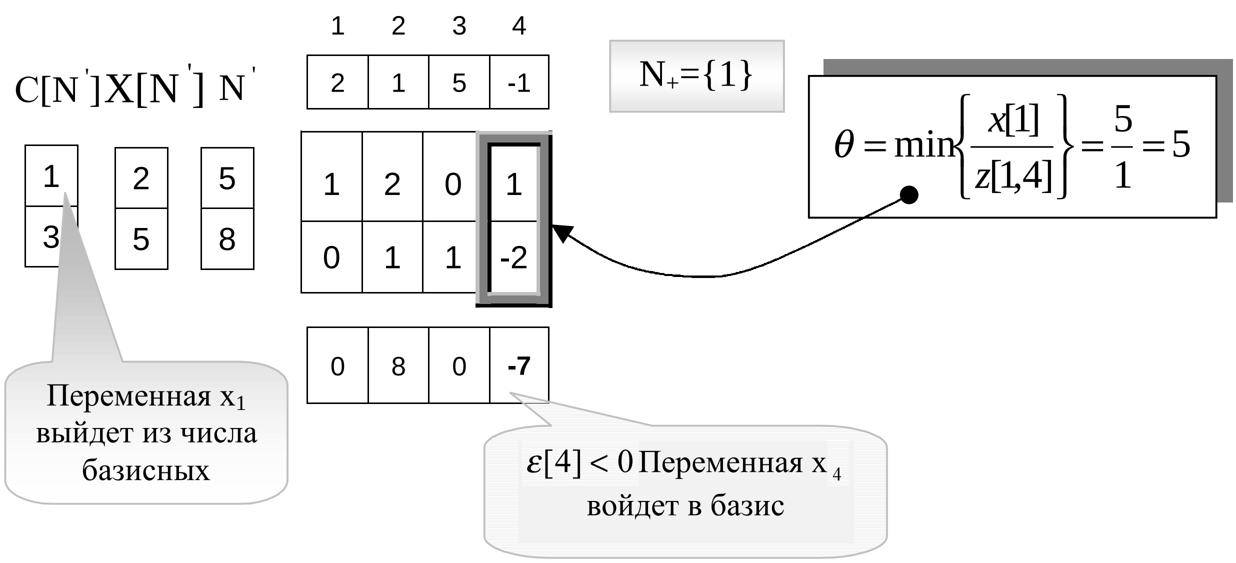


Пример. Рассмотрим ту же ЗЛП, изменив в ней коэффициенты при неизвестной x_4

$$f = 2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 = 5 \\ \qquad x_2 + x_3 \quad - 2x_4 = 8 \end{cases}$$

$$x_i \ge 0, \quad i \in 1:4$$



$$x_\theta[N] = x_0[N] - \theta \cdot z[N] = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 18 \\ 5 \end{bmatrix}$$

• Значение целевой функции на новом базисном решении

$$f(X_\theta) = f(X_0) - \theta \cdot \varepsilon[j_0]$$

увеличивается на $\Delta f = -\theta \cdot \varepsilon[j_0]$. Указанное произведение называется величиной скачка целевой функции (Δf) при переходе к новому решению. Так в вышеприведенном примере

$$f(X_\theta) = f(X_0) - \theta \cdot \varepsilon[4] = 50 - 5 \cdot (-7) = 85$$

$$\Delta f = -\theta \cdot \varepsilon[4] = 35$$

Величина Δf может быть использована как определяющая для вектора наилучшего направления при переходе к новому решению (см. замечание к алгоритму симплекс-метода в п.3.3) •

*Таким образом, **окончательно можно резюмировать**, что если* $\varepsilon[j_0] < 0$ *и* ***критерий неограниченности не выполняется (*** $N_+ \neq \emptyset$ ***, т.е. среди компонент вектора*** $Z[N']$ ***есть хотя бы одна положительная)****, то выбрав значение* $\theta > 0$ *по правилу* (+)*, получим новое решение ЗЛП* $X_\theta[N]$*, причем*

$$x_\theta[j_0] = \theta$$

$$x_\theta[j] = x_0[j] - \theta \cdot z[j], \quad \forall j \in N' \setminus \{i_0\}$$

$$x_\theta[j] = 0 \quad \text{для всех остальных } j \in N$$

которое “лучше” решения $X_0[N]$ *в смысле значения целевой функции*

$$f(X_\theta) = f(X_0) - \theta \cdot \varepsilon[j] > f(X_0)$$