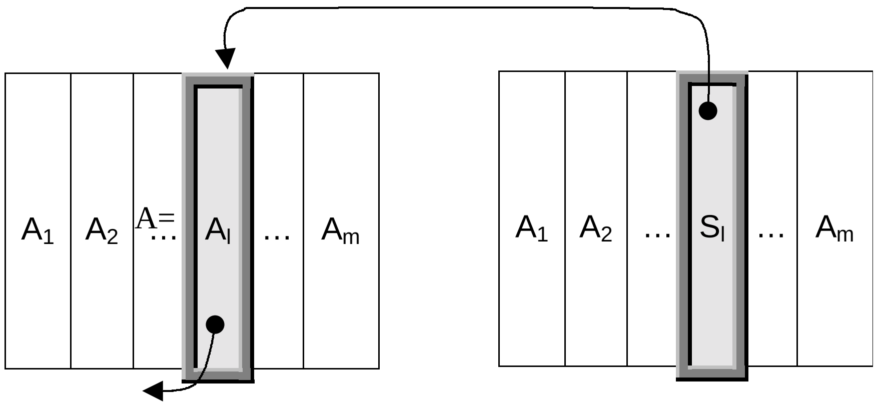
5.9. Базисная матрица нового решения ЗЛП. Левый мультипликатор. Формулы исключения Гаусса-Жордана

Так как матрица, заменившая в новом решении базисную матрицу $A[M, N']$ отличается от нее только одним столбцом, то для базисности новой матрицы $A[M, N_1']$ достаточно доказать следующую **лемму**:

Схема *(к доказательству леммы)*



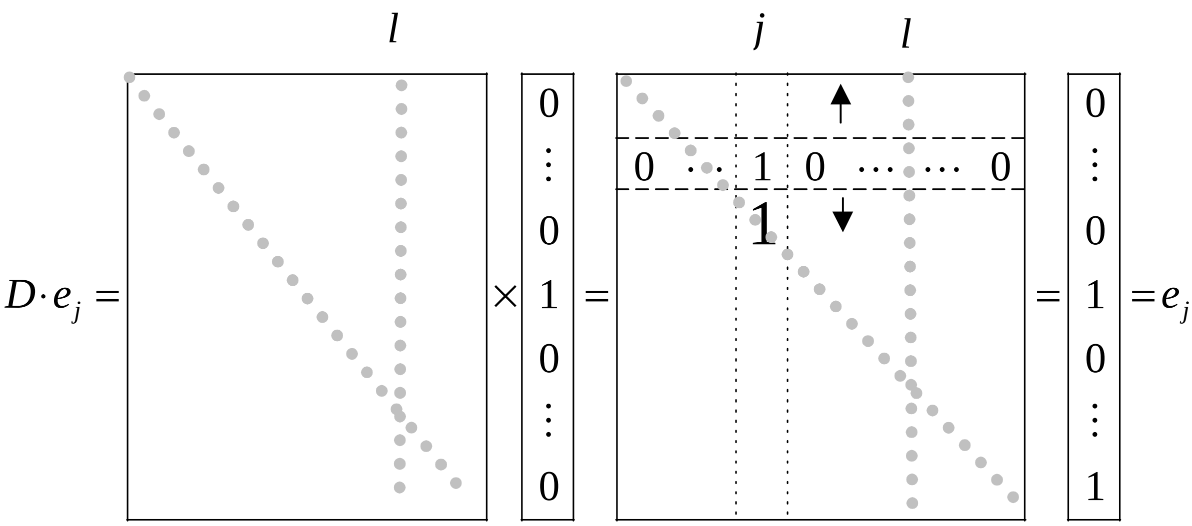
$$z = A^{-1}S_l = \begin{pmatrix} z[1] \\ z[2] \\ \vdots \\ z[l] \\ \vdots \\ z[m] \end{pmatrix}$$

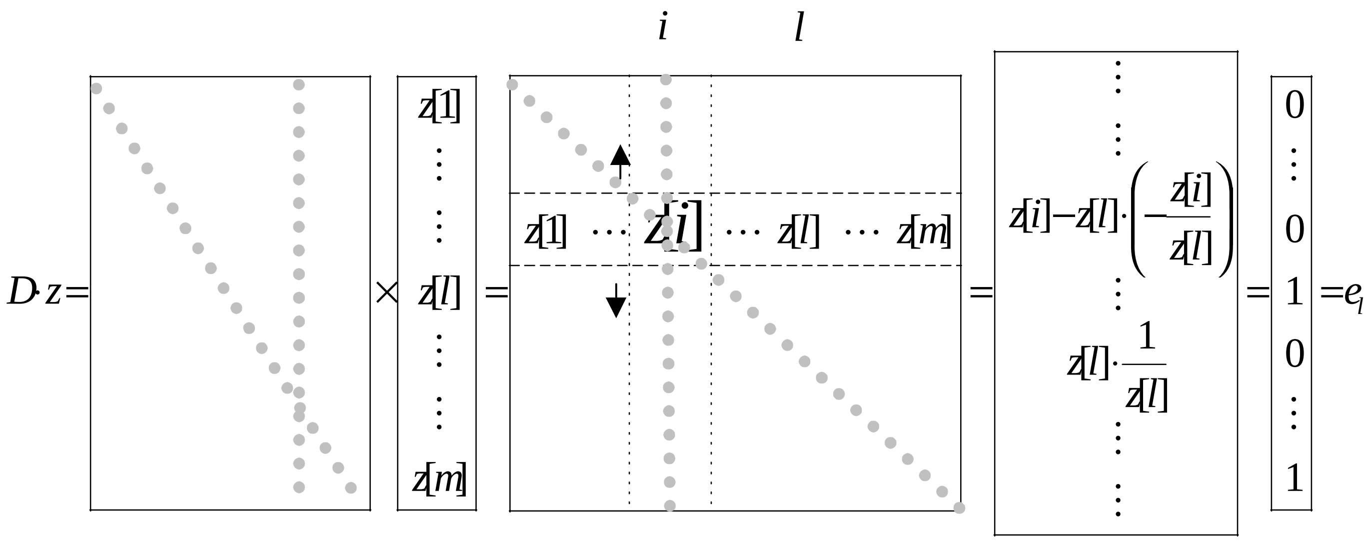
$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & d[1,l] & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & d[l-1,l] & & & \\ & & & d[l,l] & & & \\ & & & d[l+1,l] & 1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & d[m,l] & & & 1 \end{pmatrix}$$

D - левый мультипликатор

$$D_l = \left(-\frac{z[1]}{z[l]}, \cdots, -\frac{z[l-1]}{z[l]}, \frac{1}{z[l]}, -\frac{z[l+1]}{z[l]}, \cdots, -\frac{z[m]}{z[l]}\right) =$$

$$= \left(d[1,l], \cdots, d[l-1,l], d[l,l], d[l+1,l], \cdots, d[m,l]\right)$$





Пусть матрица $A = A[1:m,1:m]$ *имеет обратную* A^{-1}*, а матрица* S *отличается от* A *только l-м столбцом (* S_l*). Тогда и матрица* S *имеет обратную, если только отлична от нуля l-я компонента вектора* $Z = A^{-1} \cdot S_l$ *. При этом* $S^{-1} = D \cdot A^{-1}$*, где матрица* D *отличается от единичной только l-м столбцом* (D - называется левым мультипликатором)

$$D_l = \left(-\frac{z[1]}{z[l]}, \cdots, -\frac{z[l-1]}{z[l]}, \frac{1}{z[l]}, -\frac{z[l+1]}{z[l]}, \cdots, -\frac{z[m]}{z[l]} \right)^T$$

Доказательство Покажем, что $\left(D \cdot A^{-1}\right) \cdot S = E$
(Столбец результата получается, как произведение первой матрицы на столбец второй).

Пусть $j \neq l.$ Тогда (см. схему)

$$\left(D \cdot A^{-1}\right) \cdot S_j = \left(D \cdot A^{-1}\right) \cdot A_j = D \cdot e_j = D_j = e_j$$

При $j = l$ имеем

$$\left(D \cdot A^{-1}\right) \cdot S_j = D \cdot (A^{-1} \cdot S_l) = D \cdot Z = e_l \text{ ,}$$

так как (см. схему) $(DZ)[l] = 1$ и при $i \neq l$ $\quad (DZ)[i] = z[i] - \dfrac{z[i]}{z[l]} \times z[l] = 0$ ■

Таким образом **новая матрица** $A[M, N_1^{'}]$, столбцы которой соответствуют положительным компонентам решения $X_\theta[N]$ имеет обратную, т.е. **является базисной**, и, следовательно, **базисным является и новое решение ЗЛП** $X_\theta[N]$

Согласно лемме для матрицы $B[N_1^{'}, M]$ обратной к новой базисной $A[M, N_1^{'}]$ имеет место соотношение

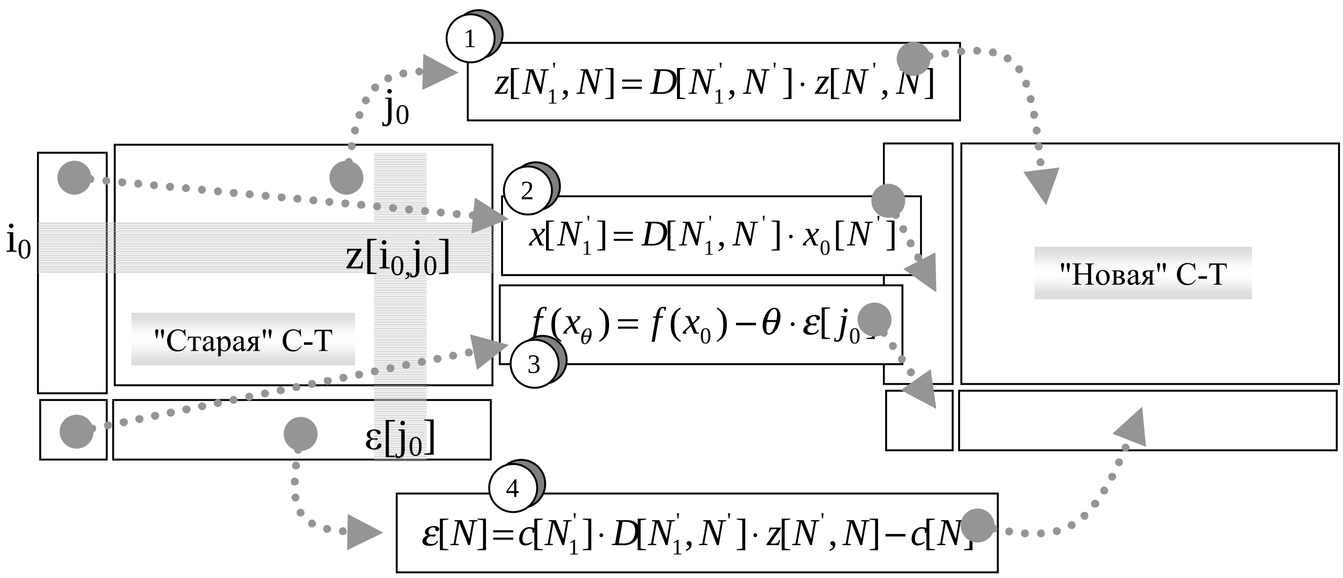
$$B[N_1^{'}, M] = D[N_1^{'}, N^{'}] \cdot B[N^{'}, M]$$

где $B[N^{'}, M]$ - “старая” обратная матрица к базисной.

Рассмотрим основную часть “старой” симплекс-таблицы прямого симплекс-алгоритма (см. в п. 3.3. выделенную часть С-Т на шаге 3 перехода к новому решению) и убедимся, что соответствующая **“новая” основная часть С-Т получается** из нее **преобразованием Гаусса-Жордана с ведущим элементом** $z[i_0, j_0]$ (i_0 - строка С-Т, на которой определялась θ, j_0 - столбец, оценка которого нарушает критерий оптимальности $\varepsilon[j_0] < 0$)

Чтобы убедиться в идентичности перехода к новому решению с помощью левого мультипликатора и преобразований Гаусса-Жордана, проведем соответствующие выкладки параллельно (см. схемы на этой и следующей странице).

Для полного обновления С-Т остается в столбце базисных индексов записать $N_1^{'}$ вместо $N^{'}$ (т.е. заменить номер i_0 на номер j_0) и в столбце коэффициентов целевой функции при базисных неизвестных заменить $C[N^{'}]$ на $C[N_1^{'}]$ (записать $c[j_0]$ вместо $c[i_0]$).



Левый мультипликатор
(см. схему)

1

$$z^*[N_1', j] = D[N_1', N'] \cdot z[N', j]$$

а) $$z^*[i, j] = z[i, j] - z[i_0, j]\frac{z[i, j_0]}{z[i_0, j_0]}, i \neq j_0$$

б) $$z^*[j_0, j] = z[i_0, j]\frac{1}{z[i_0, j_0]}, i = j_0$$

2

$$x_\theta[N_1'] = D[N_1', N'] \cdot x_\theta[N']$$

$$x_\theta[i] = x_0[i] - x_0[i_0]\frac{z[i, j_0]}{z[i_0, j_0]}, i \neq j_0$$

$$x_\theta[j_0] = x_0[i_0]\frac{1}{z[i_0, j_0]}(=\theta), i = j_0$$

3

Добавим и вычтем

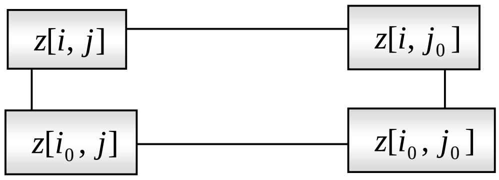
$$f(x_\theta) = c[N_1'] \cdot x[N_1'] = c[N_1'] \cdot D[N_1', N'] \cdot x[N'] =$$
$$= \{c[i_1](x_0[i_m] - z[i_1, j_0]\theta) + \cdots c[j_0]\theta + \cdots +$$
$$+ c[i_m](x_0[i_m] - z[i_1, j_0]\theta))\} + c[i_0] \cdot x_0[i_0] - c[i_0] \cdot x_0[i_0] =$$
$$= c[N'] \cdot x_0[N'] - \theta \cdot (c[i_1] \cdot z[i_1, j_0] + \cdots + c[i_0] \cdot z[i_0, j_0] +$$
$$+ \cdots + c[i_m] \cdot z[i_m, j_0] - c[j_0]) = f(x_0) - \varepsilon[j_0] \cdot \theta$$

4

Добавим и вычтем

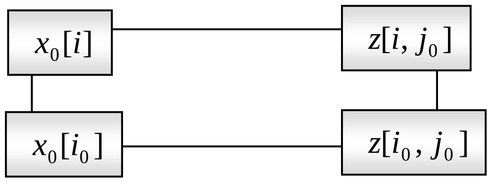
$$\varepsilon[j] = c[N_1'] \cdot z[N_1', j] - c[j] = c[N_1'] \cdot D[N_1', N'] \cdot z[N', j] - c[j] =$$
$$= \Big[c[i_1] \cdot \Big(z[i_1, j] - z[i_0, j]\frac{z[i_m, j_0]}{z[i_0, j_0]}\Big) + \cdots + c[j_0] \cdot z[i_0, j]\frac{1}{z[i_0, j_0]} +$$
$$+ \cdots + c[i_m] \cdot \Big(z[i_m, j] - z[i_0, j]\frac{z[i_m, j_0]}{z[i_0, j_0]}\Big)\Big] - c[j] +$$
$$+ c[i_0] \cdot z[i_0, j] - c[i_0] \cdot z[i_0, j] = \Big[\Big(c[i_1] \cdot z[i_1, j] + \cdots + c[i_0] \cdot z[i_0, j] + \cdots +$$
$$c[i_m] \cdot z[i_m, j]\Big) - c[j]\Big] - \frac{z[i_0, j]}{z[i_0, j_0]}\Big[\Big(c[i_1] \cdot z[i_1, j_0] + \cdots + c[i_0] \cdot z[i_0, j_0] +$$
$$+ \cdots + c[i_m] \cdot z[i_m, j_0]\Big) - c[j_0]\Big] = \varepsilon[j] - \frac{z[i_0, j]}{z[i_0, j_0]} \cdot \varepsilon[j_0]$$

Преобразования Гаусса-Жордана



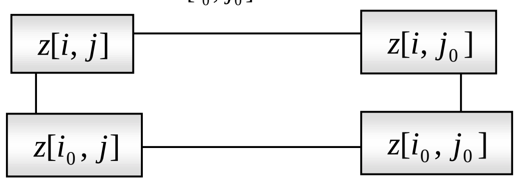
$$z^*[i, j] = z[i, j] - \frac{z[i_0, j] \cdot z[i, j_0]}{z[i_0, j_0]}, i \neq j_0$$

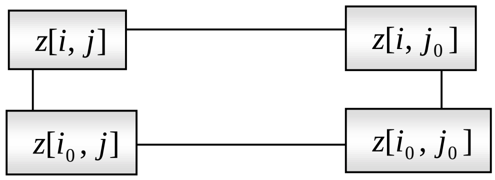
$$z^*[j_0, j] = \frac{z[i_0, j]}{z[i_0, j_0]}, i = j_0$$



$$x^*[i] = x_0[i] - \frac{x_0[i_0] \cdot z[i, j_0]}{z[i_0, j_0]}, i \neq j_0$$

$$x^*[j_0] = \frac{x_0[i_0]}{z[i_0, j_0]}, i = j_0$$





$$\varepsilon^*[j] = \varepsilon[j] - \varepsilon[j_0] \cdot \frac{z[i_0, j]}{z[i_0, j_0]}$$

$$'(x_\theta) = f(x_0) - \varepsilon[j_0] \cdot \frac{x_0[i_0]}{z[i_0, j_0]} = f(x_0) - \varepsilon[j_0] \cdot \theta$$