Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.14.2011

УДК 512.558

ПОЛУКОЛЬЦА С ИДЕМПОТЕНТНЫМ УМНОЖЕНИЕМ

Е. М. Вечтомов, А. А. Петров

Изучаются структурные свойства мультипликативно идемпотентных полуколец. Рассматриваемый класс полуколец включает в себя все булевы кольца и всевозможные дистрибутивные решетки с нулем. Особое внимание уделено конечным мультипликативно идемпотентным полукольцам и дважды идемпотентным полукольцам.
Ключевые слова: кольцо, полукольцо, решетка, идемпотентность, идеал.

1. Исходные определения и обозначения

Полукольцом [1] называется алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot, 0\rangle$ с бинарными операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$, такая, что $\langle S, +, 0\rangle$ — коммутативная полугруппа с нейтральным элементом нуль 0, $\langle S, \cdot\rangle$ — полугруппа, умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон, выполняется свойство мультипликативности нуля ($\forall x \in S\ x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$). *Полукольцом без нуля* назовем алгебраическую структуру $\langle T, +, \cdot\rangle$ без нулевого элемента, такую, что $T \cup \{0\}$ с присоединенным нулем 0 будет полукольцом. Полукольцо с коммутативным умножением называется *коммутативным.* Если в полукольце S существует нейтральный элемент 1 по умножению, то S называется *полукольцом с единицей* 1. Частным случаем полуколец служат *кольца*, аддитивные полугруппы которых являются группами (по определению). Полукольцо с квазитождеством $x + y = 0 \Longrightarrow x = 0$ называется *антикольцом* (названном так в противоположность кольцу).

Заметим, что если S — неодноэлементное антикольцо без делителей нуля, то $\langle S \setminus \{0\}, +, \cdot\rangle$ становится полукольцом без нуля.

Полукольцо с тождеством $xx = x$ (с тождеством $x + x = x$) называется *мультипликативно идемпотентным*, или МИП (соответственно, *аддитивно идемпотентным*). Мультипликативно идемпотентные кольца — это булевы кольца, структура которых достаточно хорошо изучена [2]; булевы кольца коммутативны и удовлетворяют тождеству $x + x = 0$. Аддитивно идемпотентные полукольца являются по сложению верхними полурешетками [4]; в них вводится отношение порядка $\leqslant$ по формуле:

$$x \leqslant y \Leftrightarrow x + y = y. \tag{1}$$

Полукольцо, одновременно мультипликативно и аддитивно идемпотентное, будем называть *дважды идемпотентным* [3]. К классу дважды идемпотентных полуколец принадлежат все дистрибутивные решетки [4], обладающие наименьшим элементом.

Идеал J полукольца S называется *полустрогим* (*строгим*), если a, $a + b \in J$ ($a + b \in J$) влечет $b \in J$; *простым*, если из $ab \in J$ следует $a \in J$ *или* $b \in J$ ($\forall\, a,\, b \in S$).

Скажем, что полукольцо S раскладывается в *прямую сумму* своих идеалов I и J (в записи, $S = I \oplus J$), если каждый элемент $s \in S$ однозначно представим в виде суммы $s = a + b$, где $a \in I$ и $b \in J$.

Для произвольного идеала J полукольца S положим $(\forall\, a,\, b \in S)$:

$$a\rho(J)b \text{ означает } \exists\, x,\, y \in J\, (a + x = b + y).$$

Получаем *конгруэнцию Берна* $\rho(J)$ по идеалу J на полукольце S, причем $J \subseteq [0]_{\rho(J)}$. Отметим, что: $J = [0]_{\rho(J)} \Leftrightarrow J$ — полустрогий идеал в S. В кольцах S все идеалы полустрогие и исчерпываются конгруэнциями Берна $\rho(J)$ по всевозможным идеалам J и $a\rho(J)b \Leftrightarrow a - b \in J$ $(\forall\, a,\, b \in S)$.

Полукольцо S называется 0-*расширением* полукольца A при помощи полукольца B, если существует такая конгруэнция ρ на S, что $[0]_\rho \cong A$ и $S/\rho \cong B$ (расширение посредством конгруэнции ρ) [5, 6]. Так, прямое произведение произвольных полуколец A и B есть 0-расширение A при помощи B (а также B при помощи A) посредством конгруэнции ρ : $(a,\, b)\rho(a', b')$ означает $b = b'$ при любых a, $a' \in A$ и b, $b' \in B$.

Аналогично, полукольцо S с единицей 1 назовем 1-*расширением* полукольца F (возможно, не имеющего нуля) при помощи полукольца L, если на S существует такая конгруэнция ρ, что $[1]_\rho \cong F$ и $S/\rho \cong L$. [6, 7]

Некоторые результаты статьи анонсированы в [8].

2. Мультипликативно идемпотентные полукольца

Сразу отметим, что любое МИП удовлетворяет тождеству:

$$x + y = x + xy + yx + y, \tag{2}$$

в частности,

$$x + x = x + x + x + x, \text{ или } 2x = 4x. \tag{3}$$

Действительно, $x+y = (x+y)^2 = x^2+xy+yx+y^2 = x+xy+yx+y$.

Отметим также, что если МИП обладает единицей 1, то 1 будет единственным его обратимым элементом.

Заметим еще, что в силу (1) и (2) в дважды идемпотентных полукольцах выполняются неравенства $xy \leqslant x + y$ и $yx \leqslant x + y$.

Обозначим через $r(S)$ множество всех элементов полукольца S, имеющих противоположный элемент. Легко видеть, что для произвольного полукольца S справедливы следующие утверждения:

1) $r(S)$ — строгий идеал в S, являющийся кольцом;

2) S является кольцом $\Leftrightarrow r(S) = S$;

3) S есть антикольцо $\Leftrightarrow r(S) = \{0\}$.

Сформулируем один общий результат о структуре полуколец.

Теорема A [7]. *Любое полукольцо S является 0-расширением кольца $r(S)$ при помощи антикольца $S/\rho(r(S))$.*

Докажем следующую структурную теорему, усиливающую предложение 1 из [5]:

Теорема 1. *Пусть S — произвольное полукольцо, для которого кольцо $r(S)$ имеет единицу. Тогда полукольцо S однозначно представимо в виде прямой суммы кольца и антикольца.*

Доказательство. Пусть кольцо $r(S)$ обладает единицей e. В кольце $r(S)$ элемент e имеет противоположный элемент $-e$. Рассмотрим в S идеал $J = \{s + (-e)s : \ s \in S\}$. Имеем $es = ese = se$ для всех $s \in S$. Поскольку $r(S)$ — идеал в S, то $r(S) = eS$. Ясно, что $S = r(S) + J$. Далее, пусть $r_1 + (s + (-e)s) = r_2 + (t + (-e)t)$ для некоторых r_1, $r_2 \in r(S)$ и s, $t \in S$. Умножая данное равенство на элемент e, получим $r_1 = r_1e = r_2e = r_2$, откуда и $s + (-e)s = t + (-e)t$. Поэтому получаем $S = r(S) \oplus J$, то есть $S \cong r(S) \times J$. Полукольцо J является антикольцом. Действительно, если $(s + (-e)s) + (t + (-e)t) = 0$ для некоторых s, $t \in S$, то $s \in r(S)$ в силу строгости идеала $r(S)$, $s = es$ и $s + (-e)s) = es + (-e)s = 0$. Проверим единственность разложения полукольца S в прямую сумму. Предположим, что $S = R \oplus A$ для своих идеалов R и A, являющихся, соответственно, кольцом и антикольцом. Очевидно, что $R = r(S)$. Возьмем элемент a в A. Имеем $ea \in R \cap A = 0$ и $a = ea + (a + (-e)a) = a + (-e)a \in J$. Значит, $A \subseteq J$, откуда $A = J$, поскольку $r(S) \oplus A = r(S) \oplus J$.

Следствие 1. *Полукольцо S с единицей изоморфно прямому произведению кольца и антикольца тогда и только тогда, когда кольцо*

$r(S)$ имеет (свою) единицу.

Доказательство. Достаточность доказана в теореме 1. Если же полукольцо S с единицей изоморфно прямому произведению $R \times T$ кольца R и антикольца T, то полукольца R и T имеют единицы, и при любом изоморфизме S на $R \times T$ кольцо $r(S)$ изоморфно R, стало быть, имеет единицу.

Замечание 1. Как следует из теоремы 1, в следствии 1 кольцо и антикольцо единственны с точностью до изоморфизма.

Теорема 2. *Всякое мультипликативно идемпотентное полукольцо есть* 0*-расширение булева кольца при помощи мультипликативно идемпотентного антикольца.*

Вытекает из теоремы А.

Замечание 2. В теореме 2 булево кольцо определено однозначно с точностью до изоморфизма, а мультипликативно идемпотентное антикольцо определено, вообще говоря, не однозначно.

Теорема 3. *Всякое конечное мультипликативно идемпотентное полукольцо разлагается в прямую сумму однозначно определенных булева кольца и мультипликативно идемпотентного антикольца.*

Эта теорема следует из теоремы 1 и того факта, что конечные булевы кольца содержат единицу.

Примеры 1. Перечислим все МИП $S = (a)$, порожденные одним-единственным ненулевым элементом a. На основании (3) всегда $4a = 2a$.

1.1. $S = \{0,\, a,\, a+a,\, a+a+a\} = \{0,\, a,\, 2a,\, 3a\}$ — свободное МИП с одним свободным образующим a; $|S| = 4$.

1.2. $S = \{0,\, a,\, 2a\}$, $3a = 2a$; $|S| = 3$.

1.3. $S = \{0,\, a,\, 2a\}$, $3a = a$; $|S| = 3$.

1.4. $S = \{0,\, a\}$, $2a = a$. Это двухэлементная цепь $0 < a$, изоморфная булевой решетке $\{0,\, 1\}$, где $1 + 1 = 1$.

1.5. $S = \{0,\, a\}$, $2a = 0$. Это двухэлементное булево кольцо, изоморфное полю $\mathbb{Z}_2 = \{0,\, 1\}$, где $1 + 1 = 0$.

Получили пять коммутативных, циклических по сложению полуколец с единицей $a \neq 0$. Они являются факторполукольцами свободного МИП 1.1.

В произвольном полукольце S вводится «разностное» отношение $\leqslant$:

$$x \leqslant y \Leftrightarrow \exists\, z \in S\; x + z = y. \tag{4}$$

Оно рефлексивно и транзитивно, но не обязательно антисимметрично (см. пример 1.3). Если отношение $\leqslant$ антисимметрично, то есть является отношением порядка, то полукольцо назовем *упорядочиваемым* (такие структуры названы в [9] *dioid*). Заметим, что в случае аддитивно идемпотентных полуколец (4) равносильно (1). Отношение $\sim$ на S, означающее $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, является конгруэнцией на полукольце S. Соответствующее факторполукольцо $S/{\sim}$ уже упорядочиваемо. Заметим, что класс 0 конгруэнции $\sim$ на полукольце S совпадает с идеалом $r(S)$. Упорядочиваемость полукольца S равносильна тому, что $\sim$ есть отношение равенства на S. Тем самым, теорема 2 допускает следующее усиление:

Теорема $\mathbf{2_1}$. *Всякое МИП служит 0-расширением булева кольца посредством упорядочиваемого МИП с тождеством $3x = 2x$.*

Действительно, в упорядочиваемом МИП выполняется тождество $3x = 2x$, поскольку $2x \leqslant 3x$ и $3x \leqslant 4x = 2x$ в силу (3) и (4).

Замечание 3. В силу (3) идеал $2S = \{2x : x \in S\}$ любого МИП S является дважды идемпотентным полукольцом, а факторполукольцо $S/\rho(2S)$ будет булевым кольцом, поскольку $(x+x)\rho(2S)0$ для всех $x \in S$.

Теорема 4. *Произвольное мультипликативно идемпотентное (конечное) полукольцо изоморфно вкладывается в мультипликативно идемпотентное (конечное) полукольцо с единицей.*

Доказательство. Пусть дано произвольное МИП S. Возьмем полукольцо $K = \{0, 1, 2, 3\}$ с условием $3 + 1 = 2$, изоморфное МИП из примера 1.1. Положим $T = S + \{0, 1, 2, 3\} = \{s + k : s \in S, k = 0, 1, 2, 3\}$ — множество формальных сумм $s + k$, где $s + 0 \equiv s$ и $0 + k \equiv k$, то есть $S \subset T$ и $K \subseteq T$. На S полукольцевые операции прежние, а для любых $s, t \in S$, $k, l \in K$ полагаем:

$$(s + k) + (t + l) = (s + t) + (k + l),\ (s + k)(t + l) = (st + ls + kt) + kl.$$

Кроме того, должны иметь $s + k = (s + k)^2 = s + 2ks + k$, то есть $3s+k = s+k$ для всех $s \in S$ и $k \in \{1, 2, 3\}$. Получаем МИП T с единицей $1 \equiv 0 + 1$, содержащее полукольцо S в качестве подполукольца. Если полукольцо S конечное и имеет n элементов, то полукольцо T содержит не более $4n$ элементов.

Следующая теорема служит обобщением известного результата Биркгофа о дистрибутивных решетках.

Теорема 5. *Простые идеалы любого коммутативного мультипликативно идемпотентного полукольца разделяют его элементы.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное коммутативное МИП S. По умножению S является идемпотентной коммутативной полугруппой с нулем 0. Аналогично соотношению (1) в S определяется отношение порядка $\preceq$: $x \preceq y \Leftrightarrow xy = x$. В результате получается упорядоченное множество $\langle S, \preceq\rangle$, в котором $xy = \inf(x, y)$ и 0 служит наименьшим элементом (это нижняя полурешетка с нулем). Возьмем в полукольце

S элементы $a \neq b$. Не выполняется одно из неравеств $a \preceq b$ или $b \preceq a$. Предположим, что не верно $a \preceq b$. Главный идеал $bS = \{s \in S\colon\ s \preceq b\}$ полукольца S не содержит элемент a. В силу леммы Цорна существует идеал P, максимальный среди идеалов J в S, обладающих свойствами $bS \subseteq J$ и $a \notin J$. Покажем, что P — простой идеал. Пусть $x,\ y \in S \setminus P$. Тогда $xS+P \supset P$ и $yS+P \supset P$, поэтому $a \in (xs+P) \cap (yS+P)$. Значит, $a = xs + p = yt + q$ для некоторых $s,\ t \in S$ и $p,\ q \in P$. Следовательно,

$$a = a^2 = (xs+p)(yt+q) = (xy)st + (xsq + pyt + pq),$$

откуда $xy \notin P$, поскольку $xsq + pyt + pq \in P$. Что доказывает простоту идеала P. Остается заметить, что $b = b^2 \in bS \subseteq P$, но $a \notin P$. Тем самым, простой идеал P *разделяет элементы* a и b $(a \neq b)$ данного полукольца S.

Следствие 2 (теорема представления Биркгофа)**.** *Любая дистрибутивная решетка L изоморфна подрешетке решетки подмножеств множества $Spec\,L$ всевозможных простых идеалов в L.*

Теорема 6. *Конечнопорожденные коммутативные мультипликативно идемпотентные полукольца конечны.*

Действительно, пусть коммутативное МИП S имеет n образующих $a,\ b, \ldots,\ d$. Каждый элемент из S есть сумма элементов вида

$$ka^{\delta}b^{\varepsilon} \cdot \cdots \cdot d^{\tau},\ \text{где } k = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \text{ и } \delta,\ \varepsilon, \ldots, \tau \in \{0,\ 1\},$$

причем, $\delta,\ \varepsilon, \ldots, \tau$ не равны 0 одновременно. Такое полукольцо S содержит не более 4^m элементов, где $m = 2^n$.

Примеры 2. Раасмотрим МИП S с двумя ненулевыми образующими a и b. На основании примеров 1 подполукольца (a) и (b) полукольца S могут иметь по 2, 3 или 4 элемента. Общий вид элементов полукольца $S = (a,\ b)$:

$$x = ka + lb + mab + nba + paba + qbab, \tag{5}$$

где $k, l, m, n, p, q \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$, причем $x^2 = x$. Поэтому МИП $S = (a,\ b)$ имеют не более $4^6 = 4096$ элементов.

2.1. Свободное коммутативное МИП S с двумя образующими a и b в силу (5) имеет вид:

$$S = \{ka + lb + mab\colon\ k,\ l,\ m = 0,\ 1,\ 2,\ 3\},$$

причем, $a + b + 2ab = a + b$ и $ka + lb + 3ab = ka + lb + ab$ в случае $k \neq 0$ или $l \neq 0$. Такое полукольцо имеет 40 элементов.

2.2. $S = (a) \oplus (b) \cong (a) \times (b)$, где полукольца (a) и (b) — любые из примеров 1, при этом $ab = ba = 0$. Здесь имеется — с точностью до изоморфизма — 15 МИП.

2.3. Коммутативное МИП S с образующими a и b и определяющими соотношениями $ab = ba = a$ содержит 13 элементов.

2.4. Некоммутативное МИП с образующими a и b и определяющими соотношениями $ab = a$ и $ba = b$ имеет вид $S = \{0,\ a,\ 2a,\ 3a,\ b,\ 2b,\ 3b,\ a+b,\ a+2b\}$, $|S| = 9$.

Пример 3. Возьмем произвольную идемпотентную мультипликативную полугруппу A. На множестве $S = A \cup \{0, \infty\}$ доопределим существующее в полугруппе A умножение: $0\cdot s = s\cdot 0 = 0$ и $\infty\cdot t = t\cdot\infty = \infty$ для любых $s \in S$ и $t \in S\setminus\{0\}$. Также зададим на S идемпотентное сложение следующим образом: $\forall\, s \in S$ $(0 + s = s + 0 = s)$ и $\forall\, s \neq t$ из $S\setminus\{0\}$ $s + t = \infty$. В результате получим дважды идемпотентное полукольцо S с единицей 1, имеющее относительно порядка (1) наибольший (поглощающий) элемент ∞, являющийся также мультипликативно поглощающим элементом на множестве $S\setminus\{0\}$.

Пример 4. В многообразии идемпотентных (мультипликативных) полугрупп рассмотрим свободную полугруппу A с $n \geqslant 3$ свободными образующими $a_1,\ a_2, \ldots, a_n$. По теореме Туэ [10] существует бесквадратное ω-слово в трехбуквенном алфавите $\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$, то есть бесконечная последовательность букв из алфавита $\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$, в которой нет рядом стоящих одинаковых (непустых) подслов. Поэтому полугруппа A бесконечна (счетная). В многообразии дважды идемпотентных полуколец существует свободное полукольцо $T = (a_1,\ a_2, \ldots, a_n)$ с n данными свободными образующими. Счетное дважды идемпотентное полукольцо $S = A\cup\{0,\ \infty\}$ из примера 3 является гомоморфным образом полукольца T. Поэтому полукольцо T также бесконечно, точнее счетно.

На основании примеров 1, 2 и 4 получаем:

Теорема 7. *Свободное мультипликативно идемпотентное полукольцо, а также свободное дважды идемпотентное полукольцо, с множеством X свободных образующих конечно тогда и только тогда, когда X содержит не более двух элементов.*

3. Дважды идемпотентные полукольца

Введем понятие дубль-полукольца. *Дубль-полукольцом* назовем полукольцо, в котором $a + b = ab$ для любых его ненулевых элементов a и b. А *дубль-полукольца без нуля* неодноэлементны и в них выполняется тождество $x + y = xy$, то есть умножение совпадает со сложением.

Замечание 4. Существует единственное (с точностью до изоморфизма) неодноэлементное дубль-полукольцо, не являющееся антикольцом.

Действительно, пусть V — дубль-полукольцо, в котором $a+b=0$ для некоторых его ненулевых элементов a, b. Тогда $a^2=a^2+ab=a(a+b)=0$, откуда $a+a=0$, значит, $b=(a+a)+b=a+(a+b)=a$. Возьмем произвольный элемент $x\in S\setminus\{0\}$. Имеем $a+x=ax$, $ax=a^2+ax=a(a+x)=aax=0$, $a+x=0$. По уже доказанному $x=a$. Следовательно, $V=\{0,\,a\}$ — двухэлементное кольцо с нулевым умножением.

Поэтому для любого неодноэлементного дубль-полукольца S, не изоморфного кольцу V, алгебраическая структура $\langle S\setminus\{0\},+,\cdot\rangle$ либо одноэлементна, и в этом случае S есть двухэлементнакя цепь, либо будет дубль-полукольцом без нуля.

Предложение 1. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *Дубль-полукольца S без нуля — это в точности коммутативные полугруппы $\langle S,+\rangle$ с тождеством $x+x+y+z=x+y+z$ и умножением $+$.*

2) *Дубль-полукольца с единицей $1\neq 0$ совпадают с дважды идемпотентными полукольцами с 1, являющейся наименьшим элементом в $S\setminus\{0\}$.*

3) *Все дубль-полукольца S с единицей $1\neq 0$ получаются следующим образом: берется любая верхняя полурешетка $\langle T,\leqslant\rangle$ с наименьшим элементом (обозначаемым 1) и на ней вводится умножение* $xy=x+y=\sup(x,\,y)$. Тогда $S=T\cup 0$ — с присоединенным нулем 0.

Доказательство. 1) В дубль-полукольцах S без нуля выполняется:

$$x+x+y+z=x+y+x+z=xy+xz=x(y+z)=x+y+z.$$

Если же $\langle S,+\rangle$ — коммутативная полугруппа, удовлетворяющая тождеству $x+x+y+z=x+y+z$, то полагая на ней $xy=x+y$, получим дубль-полукольцо без нуля.

2) В самом деле, если в дубль-полукольце S существует ненулевая единица 1, то оно аддитивно идемпотентно ($x+x=x$, так как $1+1=1\cdot 1=1$), мультипликативно идемпотентно ($xx=x+x=x$) и удовлетворяет для любого $x\in S\setminus\{0\}$ равенству $x+1=x\cdot 1=x$, которое означает, что 1 есть наименьший элемент верхней полурешетки $\langle S\setminus\{0\},\leqslant\rangle$.

Обратно, пусть S — дважды идемпотентное полукольцо с 1, причем 1 является наименьшим элементом верхней полурешетки $\langle S\setminus\{0\},+\rangle$. Для любых $x,\,y\in S\setminus\{0\}$ имеем $x=x\cdot 1\leqslant xy$, $y\leqslant xy$, $yx\leqslant xy$, $yx=xy$. Откуда:

$$x(x+y)=x+xy=xy,\ y(x+y)=yx+y=xy,$$

$$x + y = (x + y)(x + y) = xy + xy = xy.$$

Значит, S является дубль-полукольцом с единицей 1.

3) Следует из пункта 2).

Мы видим, что изучение дубль-полуколец сводится к исследованию коммутативных полугрупп, удовлетворяющих тождеству $x+x+y+z = x + y + z$. Такие полугруппы являются факторполугруппами соответствующих свободных полугрупп.

Пример 5. Обозначим через $S(X)$ свободную полугруппу с множеством X свободных образующих в многообразии всех коммутативных полугрупп с тождеством $x + x + y + z = x + y + z$. Тогда $S(\{x\}) = \{x,\, x+x,\, x+x+x\}$ —это трехэлементная аддитивная циклическая полугруппа без цикла;

$$S(\{x,\, y\}) = \{x,\, x + x,\, x + x + x,\, y, y + y,\, y + y + y,\, x + y,\, x + x + y\}$$

имеет 8 элементов;

$$S(\{x,\, y,\, z\}) = S(\{x,\, y\}) \cup S(\{x,\, z\}) \cup S(\{y,\, z\}) \cup \{x + y + z\}$$

содержит в силу правила суммы $8+8+8-3-3-3+1 = 16$ элементов.

Для элемента a упорядоченного множества $\langle S, \leqslant\rangle$ через $(a]$ обозначается множество $\{x \in S \colon\ x \leqslant a\}$ — нижний конус элемента a, через $[a)$ обозначается множество $\{x \in S \colon\ a \leqslant x\}$ — верхний конус элемента a. В дважды идемпотентном полукольце множество $(a]$ — подполукольцо с наибольшим элементом, $[a)$ — подполукольцо без нуля с наименьшим элементом.

Предложение 2. *Любое дважды идемпотентное полукольцо S изоморфно вкладывается в качестве простого строгого идеала в дважды идемпотентное полукольцо с единицей* 1.

Доказательство. Предположим, что дважды идемпотентное полукольцо S не имеет единицы. Образуем множество $T = S \cup (S + 1)$, где $S + 1$ есть множество формальных сумм $s + 1$, $s \in S$. Положим $(\forall\, r, s \in S)$:

$$0+1 = 1,\ s+1 = 1+s,\ (s+1)+r = r+(s+1) = (r+s)+1,\ r(s+1) = rs+r,$$

$$(s + 1)r = sr + r,\ (r + 1)(s + 1) = (r + s) + 1 = (r + 1) + (s + 1).$$

В результате получаем дважды идемпотентное полукольцо T с 1, подполукольцом которого служит S. При этом S является простым строгим идеалом в T, $(1] = \{0,\, 1\}$ и $[1) = S + 1$ есть дубль-полукольцо без нуля с наименьшим элементом 1 относительно операций в T.

Предложение 3. *В произвольном дважды идемпотентном полукольце S с единицей 1 нижний конус $(1]$ является дистрибутивной решеткой с единицей, а верхний конус $[1) = S + 1$ будет дубль-полукольцом без нуля с единицей.*

Доказательство. Пусть S — дважды идемпотентное полукольцо с 1. Верхняя полурешетка $\langle (1], \leqslant \rangle$ имеет наибольший элемент 1. Для любых $x,\, y \in (1]$ получаем $xy \leqslant x \cdot 1 = x$ и $xy \leqslant y$. Возьмем $x,\, y,\, z \in (1]$. Если $z \leqslant x$ и $z \leqslant y$, то $z = zz \leqslant xy$. Значит, $xy = \inf(x,\, y) = yx$. Следовательно, $\langle (1], \leqslant \rangle$ — дистрибутивная решетка с 1. Тот факт, что $[1) = S + 1$ есть дубль-полукольцо без нуля с единицей 1, вытекает из пункта 2 предложения 1.

Следствие 3. *Ограниченные дистрибутивные решетки суть в точности дважды идемпотентные полукольца с 1, являющейся наибольшим элементом (в них тождественно $x + 1 = 1$).*

Заметим, что существуют некоммутативные (по умножению) дважды идемпотентные полукольца с единицей.

Пример 6. На верхней полурешетке $0 < a < b$ зададим некоммутативное идемпотентное умножение, положив $ab = a$ и $ba = b$. Получаем дважды идемпотентное полукольцо с нулем $S = \{0,\, a,\, b\}$, в котором $ab \neq ba$. Как в предложении 2, вложим его в шестиэлементное некоммутативное дважды идемпотентное полукольцо $T = S \cup (S+1) = \{0,\, a,\, b,\, 1,\, a+1,\, b+1\}$ с нулем 0 и единицей 1. Как и в предложении 3, имеем $(1] = \{0, 1\}$ — двухэлементная цепь и $[1) = S + 1 = \{1,\, a+1,\, b+1\}$ — дубль-полукольцо, представляющее собой трехэлементную цепь $1 < a+1 < b+1$ по сложению, совпадающему с умножением. При этом $\{a,\, b\}$ образует некоммутативное подполукольцо в T, удовлетворяющее тождеству $xy = x$. Кроме того, $T \cdot \{a,\, b\} = \{0,\, a,\, b\} = \{a,\, b\} \cdot T$.

Пример 7. На произвольной верхней полурешетке $\langle S, + \rangle$ зададим умножение тождеством $xy = x$. В результате получим дважды идемпотентное полукольцо без нуля $\langle S, +, \cdot \rangle$ мультипликативная полугруппа которого является (и называется) полугруппой левых нулей. На всякой верхней полурешетке $\langle T, + \rangle$ определяется структура дважды идемпотентного полукольца без нуля T с тождеством $xy = y$ (с мультипликативной полугруппой правых нулей). Прямое произведение $S \times T$ этих полуколец, все его подполукольца и факторполукольца суть также дважды идемпотентные полукольца, быть может, без нуля.

Непустое подмножество F полукольца S называется его *фильтром*, если $ab,\, a+s \in F$ для любых $a,\, b \in F$ и $s \in S$. Фильтр F является подполукольцом в S, причем в случае аддитивно идемпотентного полукольца S он вместе с каждым своим элементом содержит и его верхний конус.

Фильтр F называется *простым*, если при любых a, $b \in S$ из $a + b \in F$ следует $a \in F$ или $b \in F$.

Определим на полукольце S по его фильтру F бинарное отношение $\sigma(F)$ двойственным к конгруэнции Берна способом:

$$(\forall\, a,\, b \in S)\colon\ a\sigma(F)b \Leftrightarrow \exists\, x,\, y \in F\,(ax = by).$$

Лемма. *Если фильтр F полукольца S коммутативен по умножению, то $\sigma(F)$ —конгруэнция на S.*

Доказательство. Ясно, что это отношение рефлексивно и симметрично. Пусть $a\sigma(F)b$ и $b\sigma(F)c$ для произвольных a, b, c, $s \in S$. Имеем $ax = by$ и $bu = cv$ для некоторых x, y, u, $v \in F$. Тогда $at = bt = ct$ при $t = xyuv \in F$, т. е. $a\sigma(F)c$. Значит, $\sigma(F)$ есть отношение эквивалентности на множестве S. Поскольку $at = bt$, то $(a + s)t = at + st = bt + st = (b + s)t$, $(sa)t = (sb)t$ и $(as)t = ats = bts = (bs)t$, т. е. $(a + s)\sigma(F)(b + s)$, $(sa)\sigma(F)(sb)$ и $(as)\sigma(F)(bs)$. Стало быть, $\sigma(F)$ действительно является конгруэнцией на полукольце S.

Теорема 8. *Всякое дважды идемпотентное полукольцо S с единицей 1 является 1-расширением дубль-полукольца без нуля с единицей при помощи дистрибутивной решетки с единицей.*

Доказательство. Положим $F = [1) = S + 1$ и $L = (1]$. По предложению 3 подполукольцо L полукольца S является дистрибутивной решеткой с 1, а F есть дубль-полукольцо без нуля с единицей 1. При этом F служит простым фильтром полукольца S. Рассмотрим бинарное отношение $\sigma(F)$ на полукольце S по фильтру F. По лемме $\sigma(F)$ — конгруэнция на S. Легко видеть, что $[1]_{\sigma(T)} = F$. Возьмем a, $b \in L$. Если $a\sigma(F)b$, то $ax = by$ для некоторых x, $y \in F$. Так как $x = x+1$ и $y = y+1$, то $a = ax+a = by+b = b$. Поэтому $[a]_{\sigma(T)} = \{a\}$ для всех $a \in L$. Значит, $S/\sigma(F) \cong L$.

В заключение можно поставить несколько задач.

1. Изучить конечнопорожденные коммутативные МИП.

2. Описать свободные МИП с n свободными образующими.

3. Развить структурную теорию дважды идемпотентных полуколец, в частности исследовать конечнопорожденные коммутативные дважды идемпотентные полукольца.

Литература

1. **Golan J. S.** Semiring and their applications // *Kluwer Academic Publishers: Dordrecht-Boston-London, 1999. — 380 p.*

2. **Сикорский Р.** Булевы алгебры — *М.: Мир, 1969. — 376 с.*
3. **Вечтомов. Е. М.** Дважды идемпотентные полукольца // *Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. Сб. статей. — Киров: Изд-во ВятГГУ, 2011. — Вып. 13. — С. 84–88.*
4. **Биркгоф Г.** Теория решеток — *М.: Наука, 1984. — 568 с.*
5. **Вечтомов. Е. М.** Две общие структурные теоремы о полумодулях // *Абелевы группы и модули. Сб. статей. — Томск: Изд-во ТГУ, 2000. — Вып. 15. — С. 17–23.*
6. **Вечтомов. Е. М.** Введение в структурную теорию полуколец и полутел // *Материалы XIX Международной конференции «Математика. Образование» — Чебоксары: ЧГУ, 2011. — С. 56–68.*
7. **Вечтомов. Е. М.** Введение в полукольца — *Киров: Изд-во ВятГГУ, 2000. — 44 с.*
8. **Вечтомов. Е. М.** Мультипликативно идемпотентные полукольца // *Алгебра и математическая логика: Материалы международной коференции, посвященной 100-летию со дня рождения профессора В. В. Морозова. — Казань: КФУ, 2011. — С. 54–55.*
9. **Gondran M., Minoux M.** Graphs, dioids and semirings: New models and algorithms // *Springer Science+Business Media, LLC, 2008. — 383 p.*
10. **Саломаа А.** Жемчужины теории формальных языков — *М.: Мир, 1986. — 160 с.*

Summary

Vechtomov E. M., Petrov A. A. Semirings with idempotent multiplication

In this paper we study the structural properties of multiplicatively idempotent semirings. This class of semirings contains all Boolean rings and all kinds of distributive lattices with zero. Particular attention is paid to the finite multiplicatively idempotent semirings and twice idempotent semirings.

Keywords: ring, semiring, ideal, idempotent, finite multiplicatively idempotent semirings, twice idempotent semirings.

ВятГГУ *Поступила 01.10.2011*