

УДК 51-37

ОБОБЩЕНИЕ АЛГОРИТМА УПАКОВКИ НАРЕЗАННЫХ РУЛОНОВ

*В. Л. Никитенков, О. В. Байбородина,
А. А. Поберий*

В данной статье рассматривается обобщение задачи упаковки нарезанных рулонов, рассматриваемой в статье [10]. Теперь будет рассматриваться случай рулонов не одного диаметра, а нескольких, а проблема перерасхода будет решаться не путем добавления новых форматов упаковочной бумаги (УБ), а заменой действующих форматов на другие, дающий меньший перерасход.

Ключевые слова: оптимизация, упаковка нарезанных рулонов, упаковочная бумага, уменьшение перерасхода.

В качестве введения напомним об исходной задаче, рассматриваемой в [10]. Основной задачей любого предприятия является эффективная работа производства, позволяющая обеспечить конкурентоспособность продукция на мировом рынке. Необходимость снижения себестоимости производимой продукции в целлюлозно-бумажной отрасли без значительных капиталовложений заставляет искать места нерационального использования как финансовых, так и материальных средств и ресурсов [1] - [7]. Одним из таких узких мест является заключительная стадия производства бумаги - линия отделки рулонов. На данном участке выработанный рулон оборачивается в упаковочную бумагу (УБ). Но в поставленной ранее задаче рассматривались рулоны одного диаметра [10], однако на производстве приходится сталкиваться с достаточно большим числом диаметров, что усложняет задачу. Тогда нужно проверить поставленную общую задачу (для множества диаметров) и разработать общий алгоритм ее решения.

1. Постановка общей задачи

1.1. Обобщение основных формул Имеется k диаметров, а каждому i -ому диаметру $d[i]$ соответствует N_i типов форматов бумаги, с длинами $l[N_i]$ ("линейка"форматов), вырезанные в количестве $b[N_i]$ ("линейка"количества). Для их упаковки используется *упаковочная бумага* нескольких типов, закупаемая в достаточном для осуществления упаковки количестве.

Для начала рассмотрим действующую ситуацию на производстве. Имеется m типов форматов УБ с форматами $u[i]$, $i \in 1 : m$. Упорядочим форматы по возрастанию.

$$\begin{array}{ccccccc} u[1] & > & u[2] & > & \dots & > & u[m] \\ (r[1]) & & (r[2]) & & & & (r[m]) \end{array} \quad (1)$$

Пусть все закупаемые типы УБ используются в раскатах при упаковке рулонов. Упорядочим также по возрастанию форматы рулонов i -го диаметра (с учетом попарной упаковки коротких форматов (при действующих стандартах, короткими являются форматы менее 500мм.))

$$\begin{array}{ccccccc} l[1] & > & l[2] & > & \dots & > & l[m] \\ (b[1]) & & (b[2]) & & & & (b[N_i]) \end{array} \quad (2)$$

(выше в скобках указано количество закупаемых форматов УБ и упаковываемых рулонов). Все форматы i -го диаметра при этом будут разбиты на m групп, в j -ой из которых содержатся форматы от $l[N_i^{j-1} + 1]$ до $l[N_i^j]$. И для каждого i -го диаметра справедливо: $N_i^0 = 0$, $N_i^m = N_i$.

Обозначим через \underline{l} минимальный выступ (обязательный по ГОСТу) при намотке УБ на рулон. Теперь можно подсчитать перерасход от упаковки рулона. Перерасходом УБ будем считать превышение минимального выступа:

$$\Delta \bar{l}[j, t] = u[j] - l[t] - 2\underline{l} \quad (3)$$

Таким образом, определяется перерасход от упаковки рулона формата $l[t]$ в УБ формата $u[j]$.

Пусть теперь α_i - длина рулона УБ, идущая на упаковку одного рулона бумаги диаметра $d[i]$ (оборачивает рулон соответствующего диаметра в 3 оборота):

$$\alpha_i = 3\pi d[i] \quad (4)$$

Тогда для упаковки j -й группы форматов, всех k диаметров требуется следующее количество УБ:

$$\sum_{j=1}^m r[j] \cdot \alpha_i = \sum_{i=1}^k \left(\left(\sum_{t=1}^{N_i^j - N_i^{j-1}} b[N_i^{j-1} + t] \right) \cdot \alpha_i \right) \quad (5)$$

(где $r[j]$ -количество рулонов упаковываемых в УБ формата $u[j]$)
Подсчитаем расход УБ при упаковке всех рулонов.

$$S = \sum_{j=1}^m u[j] \cdot \sum_{i=1}^k r[j] \cdot \alpha_i = \sum_{j=1}^m u[j] \cdot \sum_{i=1}^k \left(\left(\sum_{t=1}^{N_i^j - N_i^{j-1}} b[N_i^{j-1} + t] \right) \cdot \alpha_i \right) \quad (6)$$

тогда суммарный перерасход УБ выражается формулой

$$S_0 = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^k \left(\alpha_i \cdot \left(\sum_{t=1}^{N_i^j - N_i^{j-1}} \Delta \bar{l}[j, t] \cdot b[N_i^{j-1} + t] \right) \right) \quad (7)$$

Или в относительной форме

$$\begin{aligned} \delta(S_0, S) &= \frac{S_0}{S} \cdot 100 = \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{\sum_{i=1}^k \left(\alpha_i \cdot \left(\sum_{t=1}^{N_i^j - N_i^{j-1}} \Delta \bar{l}[j, t] \cdot b[N_i^{j-1} + t] \right) \right)}{u[j] \cdot \sum_{i=1}^k \left(\alpha_i \cdot \left(\sum_{t=1}^{N_i^j - N_i^{j-1}} b[N_i^{j-1} + t] \right) \right)} \cdot 100(\%) \quad (8) \end{aligned}$$

Таким образом, мы считаем, что безотходная упаковка - это упаковка, дающая ноль процентов перерасхода (в формуле (8)). Из последней формулы видно, что ноль процентов получится при $S_0 = 0$. А так как величины α_i - длина и $b[N_i^{j-1} + t]$ - количество упаковываемых в УБ рулонов - ненулевые, следовательно, нулевой процент возможен при $\Delta \bar{l}[j, t] = 0$. Такой эффект возможен, когда все рулоны упаковываются с краевым выступом равным \underline{l} , или другими словами - при упаковке рулонов формата $l[t]$ в УБ $u[j] = l[t] + 2\underline{l}$ такую упаковку будем называть *безотходной*. Нам также понадобится определить денежную стоимость этого перерасхода. Так как УБ закупается компанией, а ее стоимость зависит от массы - 32, бруб/кг. Через формулу (7) определяется площадь израсходованной УБ и нам известно, что масса 1^2 УБ равна 0,22, зная

это - преобразуем формулу (7) для определения стоимости перерасхода в рублях:

$$p_0 = 32,6 \cdot 0,22 \cdot \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^k \left(3\pi \cdot \frac{d[i]}{1000} \left(\sum_{i=1}^{N_i^j - N_i^{j-1}} \frac{\Delta \bar{l}[j, t]}{1000} \cdot b[N_i^{j-1} + t] \right) \right) \quad (9)$$

1.2. Вычисление перерасхода При действующей политике используются следующий набор УБ: 1000, 1250, 1550, 1750, 1950. Рассмотрим "линейку" форматов в заданном количестве трех диаметров 900мм., 940мм., 950мм., упаковываемых в 5 типов УБ, и с посчитанными перерасходами от упаковки в соответствующий формат:

$d, \text{мм}$	$l, \text{мм}$	$b, \text{рул}$	$\Delta \bar{l}, \text{мм}$	
15*900	600	155	200	
	620	1	180	
	680	5	120	
	699	7	101	
	700	41	100	
	750	3	50	
	800	30	0	
	840	823	210	
	880	2	170	
	900	4	150	
	1245	9	105	
	1260	11	90	
	1400	14	150	
	1660	3	90	
	1680	24	70	
	19*950	594	6	206
		600	611	200
620		8	180	
680		23	120	
700		294	100	
720		1	80	
760		2	40	
762		1	38	
800		185	0	
830		16	220	
840		2901	210	
900		8	150	
1160		7	190	
1260		40	90	
1400		22	150	
1450		6	100	
1660		9	90	
1680	64	70		

$d, \text{мм}$	$l, \text{мм}$	$b, \text{рул}$	$\Delta l, \text{мм}$
9*940	600	100	200
	620	2	180
	700	6	100
	800	27	0
	830	1	220
	840	602	210
	1260	8	90
	1660	1	90
	1680	15	70

Для оценки оптимальности 5 используемых форматов УБ, нужно определить перерасход (воспользуемся формулой (8)):

$$\delta(S_0, S) = 15,61964086(\%)$$

Зафиксируем данный перерасход, чтобы в дальнейшем использовать его для сравнения и обозначим: $\bar{\delta}(S_0, S) = 15,61964086(\%)$, а соответствующую стоимость перерасхода обозначим \bar{p}_0 . В нашем случае стоимость перерасхода (формула (9)) УБ при действующей политике в рублях составит:

$$\bar{p}_0 = 32,6 \cdot 0,22 \cdot 10191,5307717678 \approx 73093,66$$

2. Новая политика

2.1. Ориентация на "лидеров" Форматами - "лидерами" будем называть форматы с наибольшим количеством рулонов. Раньше проблема перерасхода решалась добавлением новых форматов УБ (для 3-х "лидеров") [10], но на производстве не всегда можно свободно добавлять новые форматы, т.е. их число постоянно. Тогда нужно заменить используемые пять форматов на новые.

Обозначим форматы УБ при новой политике: $u^*[j], j \in 1 : 5$. Выбор одного формата УБ в новой политике очевиден, он должен упаковывать все форматы, но с наименьшим расходом, то есть он должен быть равен сумме максимального (среди всех диаметров) по высоте рулона l_{max} и минимального обязательного загиба с каждой стороны l_{min} : $u^*[5] = l_{max} + 2l$.

В рассматриваемом случае $l_{max} = 1680$, следовательно: $u^*[5] = 1680 + 2 \cdot 100 = 1880(\text{мм})$.

Оставшиеся четыре формата выберем из расчета, чтобы они были безотходными для первых 4-х "лидеров". Для этого нужно упорядочить

рулоны всех диаметров по убыванию их количества и рассматривать первые четыре формата (обозначим их как l^*):

$l, \text{мм}$	$b, \text{рул}$
840	4326
600	866
700	341
800	242

Выберем оставшиеся четыре формата УБ таким образом, чтобы они являлись безотходными для "лидеров", т.е. к их величине нужно добавить обязательный загиб \underline{l} с каждой стороны: $u^*[j] = l^*[j] + 2\underline{l}$.

Упорядочим полученные форматы УБ по возрастанию и в результате получим следующие пять форматов УБ:

$$u[1] = 800, u[2] = 900, u[3] = 1000, u[4] = 1040, u[5] = 1880$$

Теперь для оценки эффективности нового метода нужно определить перерасход УБ при новых форматах. Определим новые остатки по формуле (3) и посчитаем перерасход при новой политике, воспользовавшись формулой (8):

$$\delta(S_0, S) = 0,903335344(\%)$$

Подсчитаем денежную стоимость перерасхода в рублях по формуле (9):

$$p_0 = 32,6 \cdot 0,22 \cdot 501,879793666726 \approx 3599,48$$

Сравним с перерасходом при действующей политике:

$$\bar{p}_0 - p_0 = 73093,66 - 3599,48 = 69494,18$$

Таким образом, внедрение новой политики даст экономию примерно 69494,18 рублей.

2.2. Поиск оптимального набора Нам удалось выбрать получить экономию от замены форматов, но появляется вопрос о возможности еще большей экономии. Так как мы по-прежнему ограничены в количестве форматов, то можем только заменить используемые 5 форматов. Чтобы выбрать новый формат, нужно убрать один из предыдущего набора - очевидно, что этот формат - формат с наименьшим числом рулонов, так как, выбрав этот формат, мы увеличим перерасход на наименьшую возможную величину. Далее, заменим убранный формат новым - следующим из списка форматов, упорядоченных по убыванию:

$l, \text{мм}$	840	600	700	800	1680	1260	1400	680	830	1660
$b, \text{рул}$	4326	866	341	242	103	59	36	28	17	13

В нашем случае формат с наименьшим числом рулонов - 800 (формат 1680 - не рассматривается, так как это формат с максимальной высотой рулона (см. пункт 2.1.) и его нельзя убирать, так как из-за его отсутствия не все рулоны будут упакованы). Вместо него ставим следующий по числу рулонов неиспользуемый формат. В нашем случае это 1260, и берем для него безотходную упаковку: $u^* = 1260 + 2 \cdot 100 = 1460$ (мм.) - таким образом мы заменили один формат УБ и получили следующий набор УБ: 800, 900, 1040, 1460, 1860.

Теперь нужно определить перерасход при этой политике. Для этого воспользуемся формулой (7).

$$\delta(S_0, S) = 0,472022983(\%)$$

Перерасход получился меньше, чем при действующем оптимальном наборе форматов УБ: 800, 900, 1000, 1040, 1860; так как $0,903335344(\%) > 0,472022983(\%)$. Теперь зафиксируем этот набор, и будем считать его оптимальным.

Мы нашли оптимальную замену безотходной упаковки для формата 800 (УБ формата 1000), дальше попробуем найти какой еще формат можно найти для еще большего уменьшения перерасхода. Следующий по старшинству формат - это формат 700. Для этого формата используется безотходная УБ - 900. Теперь нужно определить, каким форматом можно заменить эту УБ. Следующий по количеству рулонов свободный формат (т.е. для него нет безотходной УБ в действующем наборе) - это формат 800. Безотходная УБ для которого - 1000 мы использовали ранее, но убрали из действующего оптимального набора, так как нашли ему замену. Заменяем УБ 900 на 1000 и получим следующий набор: 800, 1000, 1040, 1460, 1880.

Посчитаем перерасход при таком наборе форматов УБ:

$$\delta(S_0, S) = 0,929478788(\%)$$

Перерасход получится меньше при действующем оптимальном наборе форматов: $0,929478788(\%) > 0,472022983(\%)$. Следовательно, замена УБ 900 на 1000 нецелесообразна, так как она даст больший перерасход УБ. Таким образом, оптимальный план остается прежним: 800, 900, 1040, 1460, 1880.

Заменять формат 900 на безотходную УБ для следующего формата нецелесообразно, так как мы пытались делать подобную замену для

формата 1000 и получили больший перерасход. А так как замена 1000 дает меньшую потерю (от остатков при упаковке рулонов формата 800), чем формат 900 (за счет того, что рулонов формата 700 больше, то перерасход при замене формата 900 будет еще большим, чем при замене формата 1000. Таким образом, замена формата 900 и следующие форматы с большим количеством рулонов в оптимальном наборе будет лишь увеличивать перерасход.

В итоге оптимальный план остается следующим: 800, 900, 1040, 1460, 1880 с перерасходом: $\delta(S_0, S) = 0,472022983(\%)$. Обозначим оптимальный перерасход: $\delta(S_0, S)$, а соответствующую стоимость перерасхода обозначим: \bar{p}_0 . Если сравнивать с действующей политикой выбора форматов, то получим экономию:

$$\overline{\delta(S_0, S)} - \delta(S_0, S)^* = 15,61964086 - 0,472022983 = 15,147617877(\%)$$

Посмотрим, какую денежную экономию относительно действующей политики выбора форматов даст полученный оптимальный план, воспользовавшись формулой (9):

$$p_0^* = 32,6 \cdot 0,22 \cdot 261,11253092532 \approx 1872,79$$

$$\bar{p}_0 - p_0^* = 73093,66 - 1872,79 = 71220,87$$

3. Заключение

В результате удалось добиться существенной экономии, лишь заменив использованный набор форматов - новым набором, определенным с помощью соответствующего алгоритма. В результате, на рассмотренном промере нам удалось добиться экономии 71220,87(руб.), что говорит о существенной эффективности данного метода. А выработанный в ходе работы алгоритм - модифицированная политика "лидеров" (ориентированный на безотходную упаковку форматов - "лидеров") и основные формулы для определения перерасхода легли в основу программы, которая полезна для определения эффективности указанного плана закупок УБ, с помощью которой можно определить разницу в расходах при сравнении двух планов закупок. Также с помощью программы можно выработать оптимальный план для рассматриваемых данных.

Рассматриваемые данные по трем диаметрам 900, 940 и 950 по числу рулонов составляют примерно 1,341% от всех упаковываемых диаметров за период 1 год. Применяв программу к этим данным был получен

оптимальный перерасход: 4,13%, при действующем перерасходе по данным за весь год: 12,85%. Тем самым получаем экономию:

$$\overline{\delta(S_0, S)} - \delta(S_0, S)^* \approx 12,85 - 4,13 = 8,72(\%)$$

С помощью программы также можно определить денежную экономию за год: 3313408,64 руб.

Также на рассмотренном примере, можно выделить целый класс задач, на оптимизацию использования конечного набора ресурсов, различного типа, за счет рационального выбора этого набора, ориентированного на "лидеров" по какому-либо признаку.

Литература

1. **Л.В. Канторович, В.А. Залгаллер** Рациональный раскрой промышленных материалов. Новосибирск: Наука. Сиб. отд. 1971. 298с.
2. **Э. А. Мухачева** Рациональный раскрой промышленных материалов. Применение АСУ - М: Машиностроение, 1984. 177с.
3. **А. В. Воронин, В. А. Кузнецов** Математические модели и методы в планировании и управлении предприятием ЦБП. - Петрозаводск: ПетрГУ, 2000. 256с.
4. **В. Л. Никитенков, А. А. Холопов** Задачи линейного программирования и методы их решения. - Сыктывкар: СыктГУ, 2008. 277с.
5. **Байбородина О.В.** Работа продолжается // *Целлюлоза, бумага, картон. 2010 №6. С. 42-44.*
6. **Никитенков В.Л., Подоров А.Е.** Модификации задачи раскроя отходов // *Вестн. Сыктывкарского ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. Информатика. 2009 №10. С. 119 - 136.*
7. **Поберий А.А.** Оптимизация бизнес-процесса упаковки нарезанных рулонов // *II Республиканская молодежная научная выставка. Материалы выставки 2010 С. 64 - 65.*
8. **Л.В. Культин** основы программирования в Delphi 7. СПб.: БХВ-Петербург, 2003. 608с.

9. **Е. А. Веденеева** Функции и формулы Excel 2007. СПб.: Питер, 2008. 384с.
10. **Никитенков В.Л., Байбородина О.В., Поберий А.А.** Оптимизация бизнес-процесса упаковки нарезанных рулонов // *КНИЦ УрО РАН. [в печати]*

Summary

Nikitenkov V. L., Bayborodina O. V., Poberii A. A. Generalization algorithm packing sliced rolls

In this article considered generalization problem packing sliced rolls, that is consider in article [10]. Now we shall look at situation not only one diameter, but several diameters and problem of overspending would solved not by adding new formats packing paper (PP), it would solved by changing current formats by others, which would give us lesser overspending.

Keywords: optimizing, sliced rolls packing, packing paper, decrease in overspending.

Сыктывкарский университет

Поступила 19.10.2011